Doktori értekezés

FÉLCSOPORT VARIETÁSOK SZABAD SPEKTRUMA

Pluhár Gabriella

Matematika Doktori Iskola
Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós, MTA tagja

Elméleti Matematika Doktori Program
Programvezető: Dr. Szűcs András, MTA levelező tagja

Témavezető: Dr. Szabó Csaba, egyetemi tanár, MTA doktora

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar, Algebra és Számelmélet Tanszék
Budapest, 2012.

Köszönetnyilvánítás

Megköszönöm témavezetőmnek, Szabó Csabának, hogy az algebra felé irányította a figyelmemet, valamint a témaválasztásban és a kutatásban nyújtott segítségét.

Megköszönöm Horváth Gábornak, Kátai-Urbán Kamillának, Pach Péter Pálnak, Pongrácz Andrásnak és Japheth Woodnak a közös munkát, a kutatásban nyújtott támogatást. Valamint köszönet illeti Czédli Gábort, Márki Lászlót, Libor Polákot, Szendrei Máriát és minden matematikust, akiktől tanulhattam, akik segítettek ötleteikkel, akikkel megoszthattam gondolataimat.

Végül köszönöm családomnak a sok támogatást és biztatást, amit kaptam tőlük.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. G. Higman [18] és P. Neumann [28] bizonyította, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, akkor a $\mathbf{G}$ által generált varietásban az n-elem által generált relatív szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n-ben, ha $\mathbf{G}$ nilpotens, egyébként pedig dupla-exponenciális.

A dolgozatban Higman-Neumann típusú tételeket próbálunk keresni félcsoport varietásokra. Előbb azonban tekintsük át az idevágó eredményeket.

Azonos típusú algebrák egy azonosságokkal definiált osztályát varietásnak nevezzük. Birkhoff tétele értelmében algebrák egy osztálya pontosan akkor varietás, ha zárt homomorf képre, részképzésre és direkt szorzatra. Egy varietást végesen generáltnak nevezünk, ha azt egyetlen véges algebra, $\mathbf{A}$, generálja. Ekkor a varietást $\mathcal{V}(\mathbf{A})$-val jelöljük, és az $\mathbf{A}$ direkt hatványainak a részeinek a homomorf képeiből áll.

Tetszőleges $\mathcal{V}$ varietásban minden X halmaz esetén létezik úgynevezett X által generált szabad algebra, jelölése $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$. Ha $|X| = n < \infty$, akkor $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ jelölés helyett $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$-et használunk. $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ elemeire úgy is gondolhatunk, mint a $\mathcal{V}$ felett „különböző" n-változós kifejezésekre.

Általában egy $\mathbf{A}$ algebra fölött kifejezésnek nevezünk egy olyan többváltozós műveletet, amely a projekciók és az alapműveletek segítségével előáll. Ha $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ egy n-változós kifejezés, akkor A elemeinek behelyettesítése a változókba meghatároz egy n-változós kifejezésfüggvényt, $t^{\mathbf{A}}\ A^n \to A$, $\overline{a} \mapsto t^{\mathbf{A}}(\overline{a})$ $(\overline{a} \in A^n)$. Egy $t^{\mathbf{A}}$ kifejezésfüggvényt valódi n-változósnak hívunk, ha minden változótól függ, például, ha minden $1 \leq i \leq n$ esetén léteznek olyan $a_1, \ldots, a_{i-1}, a, b, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ elemek, hogy

$$t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Mi olyan $\mathcal{V}$ varietásokkal foglalkozunk, ahol $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ minden n-re véges, azaz $\mathcal{V}$-ben minden végesen generált algebra véges. Az ilyen varietásokat lokálisan véges varietásoknak nevezzük. Ekkor a $\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumán az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot értjük. Egy végesen generált varietás mindig lokálisan véges. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{A})$ egy végesen generált varietás, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen az $\mathbf{A}$ feletti kifejezésfüggvények száma. Valamint $\mathcal{V}$ varietás p_n sorozata az $\mathbf{A}$ feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények száma. Ebből könnyen látható, hogy az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A})$ egyenlőség fennáll. Speciálisan, ha $\mathbf{A}$ elemszáma k, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$. Másrészt, ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq n$. A kételemű Boole-algebra fölött, például, minden függvény előáll, mint egy kifejezésfüggvény, ezért a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$. Egy p exponensű Abel-csoport felett minden kifejezés előáll $\prod x_i^{a_i}$ alakban, így a p exponensű Abel-csoportok szabad spektruma p^n. Az első bekezdés ezek alapján a következő módon fogalmazható át:

G. Higman [18] és P. Neumann [28] bizonyította, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, akkor a $\mathbf{G}$ által generált varietás szabad spektruma exponenciális n-ben, ha $\mathbf{G}$ nilpotens, egyébként pedig dupla-exponenciális.

Bár a szabad spektrum vizsgálata csoportokra kezdődött, a szabad algebra elsősorban univerzális algebrai fogalom. A következő eredmények univerzális algebrai jellegűek, az első kettő McKenzie-től származik. Kongruencia-disztributív varietásokról szól [19] 12.3 Tétele, azaz olyan varietásokról, amelyekben minden algebra kongruenciahálója diszributív: ha $\mathcal{V}$ nem triviális lokálisan véges kongruencia-disztributív varietás, akkor minden $0 < c < 1$-re van olyan elég nagy m, hogy $n > m$ esetén $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{2^{cn}}$ teljesül. Azaz, ezekben az esetekben a szabad spektrum nagy. Azonban az adott korlátok között sem lehet tetszőleges a szabad spektrum, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek. Például, ha a $\mathcal{V}$ varietás végesen generált, akkor vagy van olyan c és k konstans, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq cn^k$ vagy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{n-k}$ teljesül valamely k pozitív egészre és bármely n-re ([19] 12.2 Tétel). A következő tételek a szabad spektrum felső határától való eltérésre vonatkoznak. Legyen $\mathcal{V}$ egy k-elemű algebra által generált varietás, jelölje $\delta_{\mathcal{V}}(n)$ azt a nem negatív valós értékű függvényt, amelyre $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = k^{k^n - \delta_{\mathcal{V}}(n)}$. Murskiǐ [27] megmutatta, hogy vagy $\lim_{n\to\infty} \delta_{\mathcal{V}}(n) = \infty$, vagy van olyan $d \leq k$ egész, amelyre $\delta_{\mathcal{V}}(n) = d$. Berman [4] igazolta, hogy ha $k \geq 3$, ahol k az algebra méretét jelöli, akkor van olyan csak k-tól függő c pozitív konstans, amelyre vagy $\delta_{\mathcal{V}}(n) \geq c2^n$ vagy $\delta_{\mathcal{V}}(n) = d$ teljesül egy $d \leq k$ konstansra.

Az irodalomban számos cikk foglalkozik a p_n sorozatok általános tulajdonságaival, illetve azzal, hogy milyen összefüggések vannak az algebra és a p_n sorozatának tulajdonságai között. A félcsoportokkal kapcsolatos vizsgálatok az Újvidéki Egyetem Algebra és Geometria Tanszékén kezdődtek Sinisa Crvenković vezetésével. Elsődleges céljuk az úgynevezett Berman sejtés bizonyítása volt félcsoportokra. Ez azt mondja ki, hogy tetszőleges lokálisan véges félcsoport varietás esetén a p_n sorozat nemcsökkenő függvény. Crvenković, Dolinka és Ruškuc [6] igazolták a sejtést néhány félcsoport osztályra, többek közt az injektív félcsoportokra és azok úgynevezett felfújtjaira. Egy S félcsoportot injektívnek nevezünk, ha $S^2 = S$. Az ő módszerüket követve Dolinka és Marković [12] bizonyították a sejtést reguláris félcsoportok nilpotens bővítéseire.

Crvenković, Dolinka és Ruškuc [7], [8] teljesen leírták azon félcsoport varietások azonosságait, amelyek p_n sorozata felülről becsülhető egy polinommal, azaz amelyekhez van olyan k egész szám és c konstans, hogy $p_n < cn^k$. Külön jellemzését adták a loglineáris varietásoknak [8], azaz amikor az előbbi k értéke 1. A [7] dolgozatban megadták a korlátos p_n sorozattal rendelkező félcsoportokat félhálók, Boole-csoportok és derékszögű kötegek nilpotens bővítéseként.

Berman [4] a téma egy másik megközelítését adta, az egyszerű algebrák által generált varietások szabad spektrumait a szelíd kongruenciák nyelvén jellemezte. Módszerei félcsoportokról keveset árultak el. Az egyszerű félcsoportok szabad spektrumát Kátai és Szabó [23], [24] jellemezték. Megmutatták, hogy egy egyszerű félcsoport által generált varietás szabad spektrumánk logaritmusa aszimptotikusan vagy n^2 vagy $2n \log n$. Kutatásaik nyomán a Seif [42] bizonyította, hogy egy nem ortodox monoid által generált $\mathcal{V}$ varietásra $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ mindig exponenciális, és az alábbi sejtést fogalmazta meg:

1.**Sejtés** (Seif) Legyen M egy véges monoid. Ekkor M szabad spektrumának a logaritmusa pontosan akkor becsülhető felülről egy polinommal, ha $M \in EDA \cap G_{nil}$.

Dolinka [9] pedig egy Higman-Neuman típusú feltételt adott arra, hogy egy véges teljesen reguláris félcsoport által generált varietás szabad spektruma milyen lehet. Igazolta, hogy az említett varietás szabad spektrumának logaritmusa pontosan akkor becsülhető felülről polinommal, ha a varietás lokálisan ortodox és a benne lévő részcsoportok nilpotensek. Eredménye egybevág Seif sejtésével.

A vizsgálatok egy másik iránya az úgynevezett krémsejtés igazolását célozta meg. Higman [18] csoportvarietások vizsgálata közben azt vette észre, hogy a varietások szabad spektruma nem lehet akármilyen függvény. Az általa kapott szabad spektrumok mind előálltak összeadás, szorzás és (racionális szám) hatványozás(a) ismételt kombinációjaként (**C**ombination of **R**epeated **E**xponentiation, **A**ddition and **M**ultiplicaton, azaz CREAM). A sejtését, hogy minden varietás szabad spektruma előáll ilyen formában, lokálisan véges varietásokra fogalmazta meg. A sejtés cáfolatára Kovács [26] és Olshanszky [29] készítettek lokálisan véges csoportok egy olyan megszámlálhatóan végtelen halmazát, G_1, $G_2, \ldots$ amelyre teljesül, hogy $\mathcal{V}(\{G_i\})$ lokálisan véges és $G_j \notin \mathcal{V}(\{G_i | i \neq j\})$. Ennek segítségével készítettek lokálisan véges varietások egy kontinuum hosszú láncát. Mivel egymást tartalmazó varietások véges sok elem által generált szabad algebrái nem lehetnek mind izomorfak, ez kontinuum sok szabad spektrumot eredményez. Ez rögtön azt jelenti, hogy kontinuum sok féle függvény áll elő szabad spektrumként, míg CREAM függvény csak megszámlálhatóan sok van. A konstrukció hátránya, hogy a megadott varietások nem végesen generáltak, és az sem világos, hogy mik ezek a függvények. Végesen generált vatietásokra a kérdés, azaz a CREAM-sejtés teljesülése továbbra is nyitott maradt.

Dolgozatunkban megcáfoljuk a CREAM sejtést: minden $k > 0$-ra mutatunk olyan végesen generált félcsoport varietást (pontosabban köteg varietást), amely szabad spektrumának logaritmusa aszimptotikusan $cn^k \log n$. Ez a meglepő eredmény gyökeresen megváltoztatja a világról eddig alkotott képünket. Amennyiben a CREAM sejtés igaz lenne, az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$ becslés miatt a szabad spektrum logaritmusa aszimptotikusan polinom vagy aszimptotikusan exponenciális függvény kellene, hogy legyen. A $cn^k \log n$ függvény egyik sem. Így félcsoportok esetén egy sokkal árnyaltabb karakterizációs tételre, vagy tételekre számíthatunk, mint csoportok esetén. A meglévő eredmények sem mind elég informatívak. Seif konstrukciója csak monoidkra működik. Dolinka karakterizációs tétele ugyan félcsoportokról szól, de a teljesen reguláris félcsoportok osztálya csak egy szűk része a félcsoport varietásoknak. Ráadásul, Dolinka eredménye nem különbözteti meg a kötegeket a nilpotens csoportoktól, holott a szabad spektrumaik logaritmusa más aszimptotikus osztályba tartozik.

Elengedhetetlen tehát a félcsoport varietások szisztematikus vizsgálata. A félcsoport varietások hálójáról igen keveset lehet tudni, bizonyos részosztályok, amelyek könnyebben kezelhetőek, persze alaposabban le vannak írva a szakirodalomban. Elsőként természetesen a legkisebb illetve a legnagyobb varietások szabad spektrumait érdemes vizsgálni. A kicsiket tekintve az ötelemű B_2 az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ szendvicsmátrixhoz tartozó Rees-mátrix félcsoport, B_2^1 ennek az egységelemes bővítése. Seif [42] megmutatta, hogy $2^{n^2} < |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_2^1)}(n)| < 2^{n^3}$, így A_2^1, ahol A_2 szendvicsmátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, a legkisebb elemszámú monoid, mely által generált varietás szabad spektrumának mérete még nem ismert. Mi erre adunk alsó- illetve felső becslést. Továbbá Seif monoidokra vonatkozó sejtése alapján érdemes a DA osztály varietásait, illetve a minimális nem EDA-beli monoidok szabad spektrumával kezdeni. Felülről kicsit nehezebb a helyzet. A „nagy" félcsoport varietások szabad spektruma rendszerint végtelen, ezen varietások nem lokálisan végesek. Mi tehát belevágunk a teljesen reguláris félcsoportok osztályán belül az egy bizonyos értelemben maximális, illetve ahhoz közeliek szabad spektrumának a vizsgálatába. Green és Rees klasszikusnak számító cikkükben [17] igazolták, hogy az $x^r = x$ azonossággal definiált varietás pontosan akkor lokálisan véges, amikor az $x^{r-1} = 1$ azonossággal definiált csoportvarietás is az. Ezzel visszavezették a vizsgálatokat a Burnside-problémakörre. Pastijn és Trotter [30] egy tetszőleges $\mathcal{G}$ csoportvarietás esetén tekintették azon teljesen egyszerű félcsoportok $\mathcal{V}$ varietását, amely részcsoportjai $\mathcal{G}$-ben vannak. A $\mathcal{V}$-beli szóproblémát visszavezették a $\mathcal{G}$-beli szóproblémára. Vizsgálataik Kadourek és Polák [22] munkáján alapultak, ahol egy hasonló leírás már szerepelt a fent említett Green-Rees-féle varietásokra. Polák szerepe elévülhetetlen a teljesen reguláris varietások elméletének feltérképezésében. Három cikkből álló cikksorozatában [36], [37], [38] az úgynevezett mag- és nyom kongruenciák - bár ő még nem így nevezte őket - segítségével pontosan leírja a teljesen reguláris félcsoportok varietásainak hálóját. A mag segítségével minden egyes varietásra megoldja az ottani szóproblémát, ezáltal megadja az összes varietást. A varietáshálót a mag segítségével diszjunkt intervallumok uniójára bontja, a $\mathcal{V}$ varietást tartalmazó intervallum alsó és felső elemét $\underline{\mathcal{V}}$-sal, illetve $\overline{\mathcal{V}}$-sal jelöli. Például a kötegek, vagy egy adott csoportvarietáshoz tartozó ortodox félcsoportok egy-egy intevallumot alkotnak. Mégis, a fent említett példán kívül egyetlen másik intervallum sem ismert. Polák munkáit számtalanszor próbálták feldolgozni, újra megérteni, mások számára közérthetőbbé tenni, például [31], [32], [33], [40] de valódi áttörést egyik munka sem hozott. Természetesen újabb definíciók bevezetésével lehetett „rövidíteni" a leírást, de ez inkább csak technikai, mint tartalmi jelleggel bírt. Mi sem mutatja ezt jobban, minthogy ugyanaz a szerző több alkalommal is újra és újra próbálkozott a Polák-féle felépítés értelmezésével. Számos konzultációnk egyikének alkalmával Libor Polák maga is bevallotta, hogy az ortodox félcsoportokat leszámítva egyetlen konkrét példán sem tudja elméletét bemutatni: „Nobody knows anything beyond orthodox". Mi a legnagyobb $\mathcal{V}$ teljesen reguláris félcsoport varietásokról igazoljuk, hogy $\underline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$, azaz meglepetésre, az őket tartalmazó intervallum egyelemű. Továbbá, becslést adunk ezen varietások szabad spektrumára.

Dolgozatunk ezek alapján négy fő részre osztható. Először bemutatjuk a köteg varietások szabad spektrumát, ezek logaritmusai aszimptotikusan $n^k \log n$. A második részben megvizsgáljuk a legkisebb elemszámú olyan monoid szabad spektrumát, amely logaritmusa exponenciális. A harmadik részben félhálók iterált szemidirekt szorzatáról mutatjuk meg, hogy az általuk generált varietások szabad spektruma kicsi. Végül a negyedik részben teljesen reguláris félcsoportok osztályán belül az egy bizonyos értelemben maximális, illetve ahhoz közeli varietásokat vizsgáljuk, és megmutatjuk, hogy az $x^3 = x$ által definiált teljesen reguláris félcsoport varietás szabad spektruma "hatalmas", nagyobb, mint $2^{2^{\cdots^{2}}}$.

1.1 EREDMÉNYEK

1.1.1 Kötegek

A köteg idempotens félcsoport, azaz olyan félcsoport, amelyben az $x^2 = x$ azonosság teljesül. A kötegek fontos szerepet játszanak a félcsoport elméletben. Kötegekkel kapcsolatos általános tudnivalók [21]-ben találhatók. A köteg varietásokat több különböző szempontból jellemezték. A köteg varietások hálójának leírása megtalálható [5]-ben, [13]-ban és [14]-ben. A háló a varietásoknak tíz végtelen sorozatát tartalmazza, valamint hét varietást a háló alján (lásd 1. ábra).

Az összes köteg által generált varietás p_n sorozatára Gerhard a $p_n(\infty)$ jelölést vezette be. A $p_n(\infty)$ sorozatra a következő rekurzív formula teljesül (lásd [17])
(1)

$$p_n(\infty) = n^2 p_{n-1}^2(\infty).$$

Továbbá, $p_1(\infty) = 1$, emiatt $p_2(\infty) = 4$, $p_3(\infty) = 144$, stb. $p_n(k)$-ra a formula sokkal bonyolultabb (lásd [15] és [44]).
(2)

$$p_n(k) = n^2 p_{k-2}^2(\infty) \prod_{j=k-1}^{n-1} j^2 p_j(k-1), \quad n \geq k \geq 4 \text{ esetén.}$$

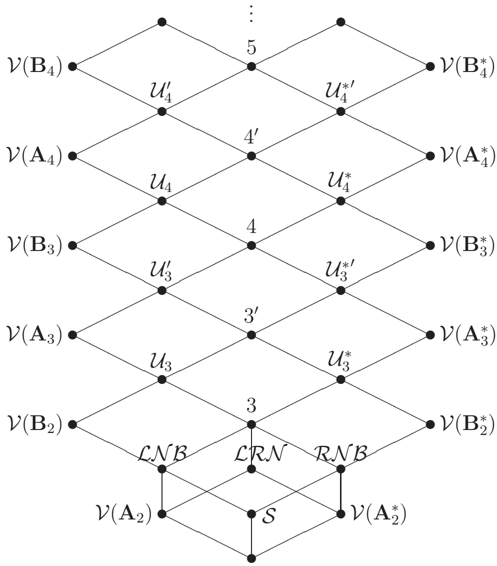
A kezdeti értékek $p_n(3) = n^2$ és $p_n(k) = p_n(\infty)$, ha $n < k$. Ebből a dolgozatban levezetjük, hogy
(3)

$$p_n(k) = n^2 p_{n-1}(k) p_{n-1}(k-1),$$

teljesül $n \geq 1$-re és $k \geq 4$-re. Legyen $p(n,k) = \log p_n(k)$. (3)-ban mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy
(4)

$$p(n,k) = 2\log n + p(n-1,k) + p(n-1,k-1)$$

$n \geq 1$, $k \geq 4$ esetén és $p(n,3) = 2\ \log n$ és $p(1,k) = 0$.



1.ÁBRA A köteg varietások hálója

4. **Tétel.** *Legyen $k \geq 4$. A köteg varietások p_n sorozatára*

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n)$$

teljesül.

Ezek után kiszámoljuk a háló többi varietásának p_n sorozatát és szabad spektrumát:

5. **Következmény.** *Bármely köteg varietás szabad spektrumára a következő teljesül ($k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$):*

- $\log |\mathbf{F}_k(n)| = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n)$,

- $\log|\mathbf{F}_{k'}(n)| = \log|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_k)}(n)| = |\log \mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_k^*)}(n)| =$
$= \frac{2}{(k-2)!}n^{k-2}\log n - \frac{2}{(k-2)!}n^{k-2}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j} + O(n^{k-3}\log n),$
- $\log|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_k)}(n)| = \log|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_k^*)}(n)| =$
$= \frac{1}{(k-1)!}n^{k-1}\log n - \frac{1}{(k-1)!}n^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} + O(n^{k-2}\log n),$
- $\log|\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k}(n)| = \log|\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k^*}(n)| =$
$= \frac{1}{(k-2)!}n^{k-2}\log n - \frac{1}{(k-2)!}n^{k-2}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j} + O(n^{k-3}\log n),$
- $\log|\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k'}(n)| = |\log \mathbf{F}_{\mathcal{U}_k^{*\prime}}(n)| =$
$= \frac{3}{(k-2)!}n^{k-2}\log n - \frac{3}{(k-2)!}n^{k-2}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j} + O(n^{k-3}\log n).$

Ezen képletek azonban semmit nem mondanak a kötegek varietásának szabad spektrumáról. Jelölje továbbra is $\mathcal{B}$ az összes köteg által alkotott varietást. A dolgozatban megmutatjuk, hogy

6. **Tétel.** *A kötegek varietásának szabad spektruma*

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| = \frac{1}{n^2}K^{2^{n+1}}(1 + O(\frac{1}{n})),$$

ahol $K = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\ldots}}}}$.

1.1.2 Az A_2^1 által generált varietás szabad spektruma

Az ötelemű A_2 az $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ szendvicsmátrixhoz tartozó Rees-mátrix félcsoport. Elemei tehát a $0, [1,1], [1,2], [2,1], [2,2]$. A 0 itt nullelem, vagyis bármivel szorozva 0-t kapunk. A többi elemre vonatkozó szorzási szabály a következő:

$$[\lambda, i][\mu, j] = \begin{cases} 0 & \text{ha } \mu = i = 2;\\ [\lambda, j] & \text{különben.}\end{cases}$$

Az A_2^1 félcsoport az A_2 egységelemes bővítése. Seif és Szabó [43] megmutatták, hogy egy n-változós szó A_2^1 feletti ekvivalenciaosztályát lényegében meghatározza a szó változóiból képzett antiláncok egy rendszere. Ebből könnyen adódik a $2^{\frac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}} \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^1)}(n)| \leq (n!)^2 2^{\frac{2^n\sqrt{2}n^{3/2}}{\sqrt{\pi}}}$ becslés.

Dolgozatunk egyik fő eredménye, hogy bebizonyítjuk, hogy léteznek olyan c és d pozitív konstansok, melyekre

$$2^{c\sqrt{n}2^n} \leq p_n(\mathcal{V}(A_2^1)) \leq 2^{n2^n + d\sqrt{n}2^n}.$$

1.1.3 $\mathcal{R}$-triviális félcsoportok

A DA pszeudovarietás egy nagy rész pszeudovarietása az úgynevezett $\mathcal{R}$-triviális félcsoportok osztálya. Egy félcsoportot $\mathcal{R}$-triviálisnak nevezünk, ha minden elem különböző jobb főideált generál. A 4. Fejezet egyik fő eredménye a 31. Következmény, amelyben megmutatjuk, hogy egy $\mathcal{R}$-triviális félcsoport szabad spektrumának logaritmusa kicsi.

Stiffler [45] megmutatta, hogy a véges $\mathcal{R}$-triviális félcsoportok osztálya egybeesik a félhálók iterált szemidirekt szorzatai által generált varietás véges elemeivel. Legyenek $(S;\circ)$, $(T;\cdot)$ félcsoportok, $\varphi\colon T^1 \to \mathrm{End}S$ monoid homomorfizmus. Ekkor $S*T$ jelöli a két félcsoport szemidirekt szorzatát, ahol az alaphalmaz: $S\times T$, a művelet pedig az alábbi módon definiálható:

$$(s_1,t_1)(s_2,t_2) = (s_1 \circ \varphi(t_1)(s_2), t_1 \cdot t_2).$$

Legyenek $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ félcsoport varietások, ekkor a két varietás szemidirekt szorzata $\mathcal{U}*\mathcal{V}$ az $S*T$ alakú szemidirekt szorzatok által generált varietás, ahol $S\in\mathcal{U}$ és $T\in\mathcal{V}$, azaz

$$\mathcal{U}*\mathcal{V} = \langle S*T \mid S\in\mathcal{U}, T\in\mathcal{V}\rangle$$

Ezek alapján félcsoport varietások iterált szemidirekt hatványát a következő módon definiáljuk: $\mathcal{V}^1=\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^{t+1}=\mathcal{V}*\mathcal{V}^t$. Jelölje $\mathcal{SL}^t$ félhálók t-szer iterált szemidirekt szorzata által generált varietást. Vezessük be a következő jelöléseket: Legyen $u\in X^+$ egy kifejezés. Legyen m_u az szóban utoljára megjelenő változó. Legyen f_u az u szó eleje, az m_u előtti része és b_u az u szó vége, m_u első előfordulása utáni része.

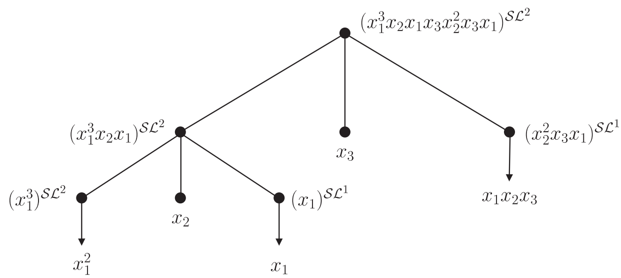
Ekkor $u = f_u m_u b_u$, ahol $c\,(f_u) = c\,(u)\setminus\{m_u\}$. Vegyük észre, hogy b_u akkor az üres szó, ha egy változó csak u végén szerepel, és f_u akkor az üres szó, ha u csak egy változót tartalmaz.

18. **Tétel.** *Legyen $t\geq 2$ és u és v két X^+-beli kifejezés, melyekre $c(u)=c(v)$. Ekkor $u\sim_t v$ akkor és csak akkor, ha a következő feltételek teljesülnek:*

(i) $m_u = m_v$,
(ii) $f_u \sim_t f_v$,
(iii) $b_u \sim_{t-1} b_v$.

A 18. tétel alapján minden $\mathcal{SL}^t$ fölötti n-változós kifejezés megadható egy hármasként. Ezen hármas létezésére alapul a következő algoritmus, mely segítségével megadjuk a kifejezések egy normálformáját. Legyen w egy n változós szó. Jelölje az $\mathcal{SL}^t$ varietásbeli w szó normálformáját $\varphi_t(w)$.

(1) Ha $t = 1$, akkor legyen $\varphi_1(w) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$, ahol a w -beli változók az indexük szerinti növekvő sorrendben vannak.
(2) Ha $n = 1$ és $w = x_i^k$, akkor legyen $l = \min\{t, k\}$ és $\varphi_t\left(x_i^k\right) = x_i^l$.
(3) Egyébként legyen $\varphi_t(w)$ a $\varphi_t(f_w)$, m_w és $\varphi_{t-1}(b_w)$ kifejezések egymásutánja: $\varphi_t(w) = \varphi_t(f_w)\, m_w \varphi_{t-1}(b_w)$.



3. ÁBRA

A 3. ábrán egy példa látható, mely megmutatja, hogy az $\mathcal{SL}^2$-beli $x_1^3x_2x_1x_3x_2^2x_3x_1$ normálformája hogyan állítható elő. A normálformája $x_1^2x_2x_1x_3x_1x_2x_3$. A varietások a kifejezések jobb felső sarkában vannak feltüntetve. A normálformáról megmutatjuk, hogy a lehető legrövidebb normálfoma, és hogy két normálforma szorzata n függvényében polinom időben meghatározható. Végül megmutatjuk, hogy az $\mathcal{SL}^t$ varietások szabad spektruma „kicsi”.

30. **Tétel.** *Az $\mathcal{SL}^t$ varietás p_n sorozatára a következő aszimptotikus becslés teljesül $t \geq 3$ esetén:*

$$\log_2 p_n(t) = \binom{n+t-1}{t} + \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(t-1)!} \cdot n^{t-1} \log n + O_t(n^{t-1})$$

Érdemes megemlíteni, hogy módszereink felhasználásával Dolinka ([11]) igazolta a Seif-sejtést a DA osztályra. Megmutatta, hogy bármely véges DA-beli félcsoport által generált varietás szabad spektrumának logaritmusa polinomiális.

1.1.4 Teljesen reguláris félcsoport varietások

Az utolsó fejezetben a teljesen reguláris félcsoportok osztályán belül az egy bizonyos értelemben maximális, illetve ahhoz közelieket vizsgáljuk. Egy félcsoportot teljesen regulárisnak nevezünk, ha az csoportok uniója. A teljesen reguláris félcsoportok $\mathcal{CR}$ osztálya varietást alkot. Egy $\mathcal{V}$ félcsoport varietást CRS varietásnak hívunk, ha minden $S \in \mathcal{V}$ teljesen reguláris. Jelöje $\underline{\mathcal{V}}$ és $\overline{\mathcal{V}}$ a $\mathcal{V}$ varietás mag kongruenciához tatrtozó osztályának legalsó és legfelső elemét a teljesen reguláris félcsoportok varietásának részvarietásainak a hálójában. Legyen $\mathcal{G}$ egy csoportvarietás, ekkor jelölje $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ azt a félcsoport varietást, amelynek minden részfélcsoportja $\mathcal{G}$-beli csoportok uniója. A dolgozat egyik fő eredménye, hogy bebizonyítjuk, hogy ekkor $\underline{\mathcal{V}(\mathcal{G})} = \mathcal{V}(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{V}(\mathcal{G})}$.
Másrészt Green és Rees [17] a következő rekurziót adta az egy bizonyos értelemben maximális CRS varietások p_n sorozatára:

$$p_n = n^2 p_{n-1}^2 |G_m|$$

valamilyen m-re, ahol G_m az m elem által generált szabad csoport az $x^{r-1} = 1$ által definiált csoportvarietásban. Kadourek és Polák [22] adott egy komplikált, $F_{\mathcal{V}}(n-1)$ struktúrájától függő rekurzív leírást G_m generátoraira, amiből látható, hogy $p_{n-1} \leq m \leq np_{n-1}$. Ezeket alkalmazva megmutatjuk, hogy az $x^3 = x$ által generált CRS varietásra, ahol $|G_m| = 2^m$,

$$p_n = n^2 p_{n-1}^2 |G_m| \geq n^2 p_{n-1}^2 2^{p_{n-1}} \geq 2^{p_{n-1}} \geq 2^{2^{p_{n-2}}} \geq \cdots \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}},$$

ahol a kitevőben n darab 2-es van.
Megjegyezzük, hogy Dolinka [10] a szerző ezen eredményt újrabizonyította hivatkozva egy a dolgozat szerzője által tartott előadásban hallottakra.

2. Köteg varietások szabad spektruma

Ebben a fejezetben megcáfoljuk a Higman-sejtést végesen generált varietásokra. Igazoljuk, hogy a legtöbb köteg varietás szabad spektrumának a logaritmusa $O(n^k \log n)$, azaz a CREAM sejtés nem teljesül. Ezen fejezet eredményei [34]-ben és [35]-ben találhatók meg.

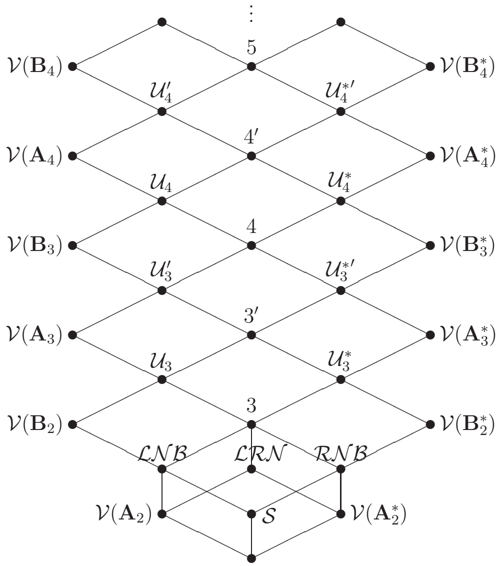
Az idempotens félcsoportokat más néven kötegeknek nevezzük. Azaz, egy félcsoport pontosan akkor köteg, ha teljesíti az $x^2 = x$ azonosságot. A köteg varietások fontos szerepet játszanak a félcsoportok algebrai elméletében. A köteg varietásokat több szempontból is leírták a 60-as évek végén. Megadták őket azonosságokkal [13], generáló algebrákkal [5] és teljesen invariáns kongruenciák segítségével is [14]. A köteg varietások hálót alkotnak a szokásos műveletekre. A háló a varietásoknak tíz végtelen sorozatát tartalmazza, valamint hét varietást a háló alján (lásd 1. ábra). Mint látható, az ábra jobb oldalán és bal oldalán levő varietások unió-felbonthatatlanok, és végesen generáltak, azaz generálhatóak egyetlen félcsoporttal. Az $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i^*, \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i^*$ félcsoportokra teljesül, hogy $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i \cup \{1\}$, $|\mathbf{A}_i| = \frac{n^2+n-2}{2}$ valamint $\mathbf{A}_i$ és $\mathbf{A}_i^*$ és $\mathbf{B}_i$ és $\mathbf{B}_i^*$ duálisok [16]. Az algebrák az $\{1, 2, \dots, i\}$ halmaz önmagára képező függvényeinek egy részhalmazaként vannak megadva. Az is látható, hogy minden varietás előáll legfeljebb kettő unió-felbonthatatlan varietás uniójaként. A $x(yz) = (xy)z$ és $x^2 = x$ azonosságok mellett mindegyik köteg varietás definiálható egyetlen azonossággal. Például, a félhálók varietása $\mathcal{S}$ az $xy = yx$ azonossággal, vagy a bal normális kötegek $\mathcal{LNB}$ az $xyz = xzy$-nal (lásd [13]). Hagyományosan a középen levő varietásokat $3, 3', 4, 4', \dots$-val jelöljük, és a másik két sorozat kisebb sorozatokra bomlik, amiket $\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4, \dots$, $\mathcal{U}_3', \mathcal{U}_4', \dots, \mathcal{U}_3^*, \mathcal{U}_4^*, \dots$ és $\mathcal{U}_3^{*\prime}, \mathcal{U}_4^{*\prime}, \dots$-val jelölünk.

2.1 A köteg varietások szabad spektruma

A háló alján levő kilenc varietás szabad spektruma jól ismert.

1. Állítás. *A háló alján levő kilenc varietás szabad spektruma a következő*

- $|\mathbf{F}_{\mathcal{T}}(n)| = 1,$
- $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2)}(n)| = |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^*)}(n)| = n,$
- $|\mathbf{F}_{\mathcal{S}}(n)| = 2^n - 1,$
- $|\mathbf{F}_{\mathcal{LNB}}(n)| = |\mathbf{F}_{\mathcal{RNB}}(n)| = n2^{n-1},$
- $|\mathbf{F}_{\mathcal{LRN}}(n)| = n^2,$
- $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_2)}(n)| = |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_2^*)}(n)| = \sum \binom{n}{k} k!.$



1. ÁBRA A köteg varietások hálója

Ezen szint felett levő köteg varietások p_n sorozatait a következő módon lehet kiszámolni (lásd [15] 4.4 és 5.1 Tétel).

2. Tétel. *Legyen $\mathcal{V}$ egy köteg varietás, mely tartalmazza 3-t. Ekkor*

$$p_n(\mathcal{V}) = \sqrt{p_n(\overline{\mathcal{V}})p_n(\underline{\mathcal{V}})},$$

ahol $n \geq 0$, $\overline{\mathcal{V}}$ a legkisebb varietás k vagy k' formájában, ami tartalmazza $\mathcal{V}$-t és $\underline{\mathcal{V}}$ a legnagyobb ilyen, amit $\mathcal{V}$ tartalmaz. Továbbá, ha $k \geq 3$ és $n \geq 0$, akkor

$$p_n(k') = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k+1)}.$$

Ezért a következő egyenlőségek fennállnak.

3. Lemma. *Bármely köteg varietás p_n sorozata kiszámolható $p_n(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) sorozatok segítségével.*

$p_n(\mathcal{V}(A_k)) = p_n(\mathcal{V}(A_k^*)) = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k+1)},$
$p_n(\mathcal{V}(B_k)) = p_n(\mathcal{V}(B_k^*)) = \sqrt{p_n(k')}\sqrt{p_n(k+1')} = \sqrt[4]{p_n(k)p_n^2(k+1)p_n(k+2)},$
$p_n(\mathcal{U}_k) = p_n(\mathcal{U}_k^*) = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k')} = \sqrt[4]{p_n(k)^3 p_n(k+1)},$
$p_n(\mathcal{U}_k') = p_n(\mathcal{U}_k^{*\prime}) = \sqrt{p_n(k')}\sqrt{p_n(k+1)} = \sqrt[4]{p_n(k)p_n(k+1)^3}.$

Tehát elég kiszámolni $p_n(k)$ értékét, és abból könnyen megkapható bármely köteg varietás szabad spektruma.

Az összes köteg által generált varietás p_n sorozatára Gerhard a $p_n(\infty)$ jelölést vezette be. A $p_n(\infty)$ sorozatra a következő rekurzív formula teljesül (lásd [17])

$$p_n(\infty) = n^2 p_{n-1}^2(\infty). \tag{1}$$

Továbbá, $p_1(\infty) = 1$, emiatt $p_2(\infty) = 4$, $p_3(\infty) = 144$, stb. Azonban valódi részvarietások esetén a $p_n(k)$-ra adott formula sokkal bonyolultabb (lásd [15] és [44]). Ha $n \geq k \geq 4$, akkor

$$p_n(k) = n^2 p_{k-2}^2(\infty) \prod_{j=k-1}^{n-1} j^2 p_j(k-1). \tag{2}$$

A $k = 3$ és az $n \leq k$ esetekben a következők teljesülnek

$$p_n(3) = n^2 \quad \text{és} \quad p_n(k) = p_n(\infty).$$

Rögzítsük k-t. Alkamazzuk (2)-t n-re és $n-1$-re. Osztás után azt kapjuk, hogy $n > k \geq 4$ esetén

$$\frac{p_n(k)}{p_{n-1}(k)} = n^2 p_{n-1}(k-1), \quad \text{azaz}$$

$$p_n(k) = n^2 p_{n-1}(k) p_{n-1}(k-1). \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy a fenti egyenlőség igaz minden n-re és k-ra. Ha $k \geq n$, akkor (1) bal oldalán helyettesítsünk $p_n(k)$-t $p_n(\infty)$ helyébe. A jobb oldalán az egyik $p_{n-1}(\infty)$ helyébe írjunk $p_{n-1}(k)$-t, a másik helyébe pedig $p_{n-1}(k-1)$-t. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p_n(k) = n^2 p_{n-1}(k-1) p_{n-1}(k), \quad k \geq n,\ k \geq 4 \text{ esetén is.}$$

Tehát (3) igaz tetszőleges $n \geq 1$-re és $k \geq 4$-re.

Vezessük be a $p(n,k) = \log p_n(k)$ jelölést. (3)-ban mindkét oldal logaritmusát véve $n \geq 1$, $k \geq 4$ esetén a következő összefüggés adódik

$$p(n,k) = 2\log n + p(n-1,k) + p(n-1,k-1). \tag{4}$$

Továbbá

$$p(n,3) = 2\ \log n \quad \text{és} \quad p(1,k) = 0. \tag{5}$$

A (4)-es rekurzív formula megoldásanak zárt alakja az (5)-ben levő kezdeti értékekkel

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-4}\binom{n-m-1}{t}\log m + 2\log n. \tag{6}$$

4. Tétel. *Legyen $k \geq 4$. A köteg varietások p_n sorozatára*

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n - \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{j=1}^{k-3}\frac{1}{j} + O(n^{k-4}\log n).$$

Bizonyítás. Rendezzük át (6)-t, úgy hogy különválasztjuk a főtagot.

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4}\log m +$$
$$+\left(4\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-5}\binom{n-m-1}{t}\log m + 2\log n\right)$$

Írjunk $\log n$-t $\log m$ helyébe a hibatagban, és használjuk a

$$\sum_{n=t}^{k}\binom{n}{t} = \binom{k+1}{t+1} \tag{7}$$

azonosságot. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4}\log m + O(n^{k-4}\log n).$$

Felhasználva a

$$\log m = \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{m}\right) \tag{8}$$

egyenlőséget,

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) + O(n^{k-4}\log n)$$

adódik. Felcserélve az összegzéseket, (7)-t és a hibatag becsléséhez a

$$\sum\frac{1}{m}\binom{n-m-1}{k-4} \leq n^{k-4}\sum\frac{1}{m}$$

egyenlőtlenséget alkalmazva

$$p(n,k) = 4\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}\sum_{m=l}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4} - 4\gamma\sum_{m=l}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4} + O(n^{k-4}\log n) =$$

$$= 4\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}\binom{n-l}{k-3} - 4\gamma\binom{n-1}{k-3} + O(n^{k-4}\log n)$$

adódik. Az $\binom{n-l}{k-3} = \frac{(n-l)^{k-3}}{(k-3)!} + O(n^{k-4})$ helyettesítéssel a

$$(9)\quad p(n,k) = \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(n-l)^{k-3}}{l} - \frac{4\gamma}{(k-3)!}n^{k-3} + O(n^{k-4}\log n)$$

összefüggéshez jutunk. Kifejtve a számlálót a binomiális tétel segítségével, csak a fő tagokat megtartva, és (8)-at újra alkalmazva megkapjuk, hogy

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + O(n^{k-3}).$$

Ha pontosabb eredményt szeretnénk kapni, akkor (9)-ben minden együtthatót ki kell számolni.

$$\frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(n-l)^{k-3}}{l} = \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-3}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^t l^{k-3-t}}{l} =$$

$$= \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{l}n^{k-3} + \sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^t l^{k-3-t}}{l}\right) =$$

$$= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l} + \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t l^{k-4-t}.$$

(8)-at újra alkalmazva és az összegzést felcserélve adódik, hogy

$$\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t l^{k-4-t} =$$

$$= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t\sum_{l=1}^{n-1}l^{k-4-t}.$$

Most helyettesítsünk az egyenlőségbe $\sum_{l=1}^{n-1} l^{k-4-t} = \frac{n^{k-3-t}}{k-3-t} + O(n^{k-4})$-t. Ekkor

$$\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t\frac{n^{k-3-t}}{k-3-t} + O(n^{k-4}) =$$

$$= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^{k-3}}{k-3-t} + O(n^{k-4}) =$$

$$= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{1}{k-3-t} + O(n^{k-4}).$$

Vizsgáljuk meg n^{k-3} együtthatójában szereplő összeget. A összeg $\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}}{s}$, ami nem más, mint az $f(x) = \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}x^s}{s}$ függvény értéke az $x = 1$ helyen. Deriválva $f(x)$-t

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}x^{s-1}.$$

adódik. Átalakítva az összeget, az

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}x^{s-1} = \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}x^s}{x} = \frac{(1-x)^m - 1}{x} =$$

$$= -\frac{(1-x)^m - 1}{(1-x)-1} = -\left((1-x)^{m-1} + (1-x)^{m-2} + ... + 1\right) = -\sum_{j=0}^{m-1}(1-x)^j.$$

összefüggést kapjuk. Az $f'(x)$ függvényt integrálva

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m}\frac{(1-x)^j}{j} + c, \text{ valamilyen } c\text{-re.}$$

Tehát,

$$f(x) = \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}x^s}{s} = \sum_{j=1}^{m}\frac{(1-x)^j}{j} + c. \tag{10}$$

Behelyettesítve $x = 0$-t (10)-be, azt kapjuk, hogy

$$c = -\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}.$$

Most (10)-be x helyére 1-t helyettesítve megkapjuk, hogy

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{s} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Végül, helyettesítsünk be $m = k - 3$-t. Így

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n).$$

□

A 2. Tétel és 3. Következmény segítségével kiszámolható a többi köteg varietás p_n sorozata és szabad spektruma.

5. Következmény. *Bármely köteg varietás szabad spektrumára a következő teljesül ($k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$):*

- $\log |\mathbf{F}_k(n)| = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n)$,
- $\log |\mathbf{F}_{k'}(n)| = \log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_k)}(n)| = |\log \mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_k^*)}(n)| =$
  $= \frac{2}{(k-2)!} n^{k-2} \log n - \frac{2}{(k-2)!} n^{k-2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j} + O(n^{k-3} \log n)$,
- $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_k)}(n)| = \log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}(B_k^*)}(n)| =$
  $= \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1} \log n - \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + O(n^{k-2} \log n)$,
- $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k}(n)| = \log |\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k^*}(n)| =$
  $= \frac{1}{(k-2)!} n^{k-2} \log n - \frac{1}{(k-2)!} n^{k-2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j} + O(n^{k-3} \log n)$,
- $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{U}_k'}(n)| = |\log \mathbf{F}_{\mathcal{U}_k^{*\prime}}(n)| =$
  $= \frac{3}{(k-2)!} n^{k-2} \log n - \frac{3}{(k-2)!} n^{k-2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j} + O(n^{k-3} \log n)$.

Bizonyítás. A 2. Tételből és 3. Lemmából rendre kiszámolhatók a k', $\mathcal{V}(A_k)$, $\mathcal{V}(A_k^*)$, $\mathcal{V}(B_k)$, $\mathcal{V}(B_k*)$, $\mathcal{U}_k$, $\mathcal{U}_k^*$, $\mathcal{U}_k'$, $\mathcal{U}_k^{*\prime}$ köteg varietások p_n sorozatai.

$$\log p_n(k') = \log p_n(\mathcal{V}(A_k)) = \log p_n(\mathcal{V}(A_k^*)) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{(k-2)!} n^{k-2} \log n - \frac{4}{(k-2)!} n^{k-2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j}\Big) + O(n^{k-3} \log n),$$

$$\log p_n(\mathcal{V}(B_k)) = \log p_n(\mathcal{V}(B_k^*)) =$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{4}{(k-1)!} n^{k-1} \log n - \frac{4}{(k-1)!} n^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\Big) + O(n^{k-2} \log n),$$

$$\log p_n(\mathcal{U}_k) = \log p_n(\mathcal{U}_k^*) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{(k-2)!}n^{k-2}\log n - \frac{4}{(k-2)!}n^{k-2}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j}\right) + O(n^{k-3}\log n),$$

$$\log p_n(\mathcal{U}_k') = \log p_n(\mathcal{U}_k^{*\prime}) =$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{(k-2)!}n^{k-2}\log n - \frac{4}{(k-2)!}n^{k-2}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j}\right) + O(n^{k-3}\log n).$$

A $|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(\mathcal{V})$ összefüggésből a $\log p_n(\mathcal{V}) < \log|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = \log p_n(\mathcal{V}) + n\log 2$ becslés adódik minden olyan varietásra, amelynek monoton a p_n sorozata. Így ezen varietásokra $\log|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = \log p_n(\mathcal{V}) + O(n)$. Mivel az összes köteg varietás p_n sorozata monoton, az állítás teljesül az összes olyan varietásra, amelyet 4 nem tartalmaz. A többi esetben a hibatag becslése nem megfelelő. A 4-ben levő varietások p_n sorozatára a következő teljesül:

$p_n(4) = n!^4/n^2$
$p_n(\mathcal{U}_3') = p_n(\mathcal{U}_3^{*\prime}) = n!^3/n$
$p_n(\mathcal{V}(A_3)) = p_n(\mathcal{V}(A_3^*)) = p_n(3') = n!^2$
$p_n(\mathcal{U}_3) = p_n(\mathcal{U}_3^*) = n!n$

Ezekben az esetekben $p_n(\mathcal{V}) \geq np_{n-1}(\mathcal{V})$ minden $n \geq 1$-re. Így azt kapjuk, hogy

$$p_n(\mathcal{V}) \leq |\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = \sum_0^n\binom{n}{t}p_t(\mathcal{V}) \leq \sum_0^n\binom{n}{t}p_n(\mathcal{V})\frac{1}{n(n-1)\cdots(t+1)} =$$
$$= p_n(\mathcal{V})\sum_0^n\frac{1}{(n-t)!} \leq ep_n(\mathcal{V})$$

Tehát $\log|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = \log p_n(\mathcal{V}) + O(1)$, így a hibatagnak $\log p_n(\mathcal{V})$-re és $\log|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)|$-re ugyanaz a nagyságrendje az összes esetben.

□

Bebizonyítottuk, hogy minden $\mathcal{V}$ valódi köteg varietásra $\log p_n(\mathcal{V})$ aszimptotikusan $\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n$, ahol k egy a varietástól függő állandó: a varietás magassága a köteg varietások hálójában. Ez a képlet azonban semmit nem mond a kötegek varietásának szabad spektrumáról. Erre most aszimptotikus becslést adunk. Jelölje $\mathcal{B}$ az összes köteg által alkotott varietást. A varietás szabad spektrumát $|\mathbf{F}_\mathcal{B}(n)|$-nel jelöljük, a p_n sorozatra a $p_n(\mathcal{B})$ helyett továbbra is a már korábban bevezetett $p_n(\infty)$ jelölést használjuk.

6. Tétel. *A kötegek varietásának szabad spektruma*

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| = \frac{1}{n^2} K^{2^{n+1}} (1 + O(\frac{1}{n})),$$

ahol $K = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\ldots}}}}.$

Bizonyítás. A kötegek varietásának p_n sorozatára, ahogy korábban is láttuk, a

$$p_n(\infty) = n^2 p_{n-1}^2(\infty)$$

rekurzió teljesül (lásd [17]). Mivel $p_1(\infty) = 1$ egyszerűen adódik, hogy $p_2(\infty) = 4$, $p_3(\infty) = 144$, stb. Könnyen észrevehető, hogy

$$p_n(\infty) = \prod_1^n k^{2^{n-k+1}}$$

Ezek szerint $p_n(\infty)$ logaritmusára teljesül, hogy

$$\log p_n(\infty) = 2^{n+1} \sum_1^n \frac{\log k}{2^k}.$$

A $\sum_1^\infty \frac{\log k}{2^k}$ sor gyorsan konvergál egy C konstanshoz, ahol

$$e^C = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\ldots}}}} \sim 1,66$$

Átírva

$$\log p_n(\infty) = 2^{n+1} C - 2^{n+1} \sum_{n+1}^\infty \frac{\log k}{2^k}$$

adódik. A $\log(n+j) = \log n + O(\frac{j}{n})$ összefüggést felhasználva most megbecsüljük a $2^{n+1} \sum_{n+1}^\infty \frac{\log k}{2^k}$ tagot.

$$2^{n+1} \sum_{n+1}^\infty \frac{\log k}{2^k} = 2^{n+1} \sum_{n+1}^\infty \frac{\log n}{2^j} + O(\frac{j}{n2^j}) = 2\log n + O(\frac{1}{n}).$$

Tehát $\log p_n(\infty) = C^{2^{n+1}} - 2\log n + O(\frac{1}{n})$ teljesül, így

$$p_n(\infty) = \frac{1}{n^2} (e^C)^{2^{n+1}} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Végül, $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathcal{V})$ felhasználásával $e^C = K$ helyettesítéssel megkapjuk, hogy

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| = \frac{1}{n^2} K^{2^{n+1}} (1 + O(\frac{1}{n})),$$

ahol $K = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5 \ldots}}}}$. $\square$

3. Az A_2^1 által generált varietás szabad spektruma

Ahogy a véges egyszerű csoportok tekinthetők a véges csoportok építőköveinek, úgy a véges félcsoportok alapkövei a véges teljesen egyszerű és a teljesen 0-egyszerű félcsoportok. Ugyanis minden véges egyszerű félcsoport izomorf egy teljesen egyszerű vagy teljesen 0-egyszerű félcsoporttal. Itt az "egyszerű" kifejezésnek különbözik a jelentése az univerzális algebrában és a félcsoportelméletben. Az univerzális algebrában egy algebrát egyszerűnek neveznek, ha nincs valódi nemtriviális kongruenciája. A félcsoportelméletben az ilyen félcsoportokat kongruenciamentesnek nevezik, és az olyan félcsoportot hívják egyszerűnek, amely nem tartalmaz valódi ideált. Így értelemszerűen minden kongruenciamentes félcsoport egyszerű.

A következő konstrukció és tétel Rees [39] nevéhez fűződik, amelynek segítségével a teljesen 0-egyszerű félcsoportok egy szép és könnyen kezelhető reprezentációját kapjuk. Legyen Λ és I nemüres halmaz, $\mathbf{G}$ pedig egy csoport. Legyen $M = (m_{\lambda,i})$ olyan $\Lambda \times I$ típusú mátrix, amelynek elemei a $G \cup \{0\}$ halmazból valók, és minden sora és minden oszlopa tartalmaz legalább egy 0-tól különböző, azaz G-beli elemet. Az $(I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}$ halmazon bevezetjük a következő műveletet:

$$(i,g,\lambda)(j,h,\mu) = \begin{cases} (i, gm_{\lambda,j}h, \mu), & \text{ha } m_{\lambda,j} \neq 0, \\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j} = 0, \end{cases}$$
$$(i,g,\lambda)0 = 0(i,g,\lambda) = 00 = 0.$$

Ellenőrizhető, hogy így zéruselemes félcsoportot kapunk. Ezt a félcsoportot $\mathbf{G}^0$ feletti Rees-mátrixfélcsoportnak nevezzük, és $\mathcal{M}^0(I, \mathbf{G}, \Lambda; M)$-mel jelöljük. Egy Rees-mátrixfélcsoportot (innen jön az elnevezés) mátrixokból álló félcsoportként is elképzelhetünk. Feleltessük meg a 0 elemnek az $I \times \Lambda$ típusú zérus mátrixot, az (i, g, λ) alakú elemnek pedig azt a mátrixot, ami $I \times \Lambda$ típusú, és pontosan egy nem 0 elemet tartalmaz, mégpedig g-t, a mátrix i-edik sorának és λ-adik oszlopának metszéspontjában. Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredeti félcsoporttal izomorf zéruselemes félcsoportot kapunk, ha a műveltet a következőképpen értelmezzük ezen mátrixok halmazán: $A \circ B = AMB$, ahol az utóbbi a szokásos mátrixszorzás. Az M mátrixot ezért szendvicsmátrixnak nevezik.

Egy félcsoportot kombinatorikusnak nevezünk, ha csak triviális csoportot tartalmaz részfélcsoportként. Mivel $\mathcal{M}^0(I, \mathbf{G}, \Lambda; M)$-ben $\mathbf{G}_{i,\lambda} = \{(i, g, \lambda) \colon g \in \mathbf{G}\}$ olyan részfélcsoport, ami $\mathbf{G}$-vel izomorf minden olyan i, λ párra, ahol $m_{\lambda,i} \neq 0$, így az $\mathcal{M}^0(I, \mathbf{G}, \Lambda; M)$ Rees-mátrixfélcsoport

varietás	generáló félcsoport	mátrix (M)
$\mathcal{SL}$	$\mathbf{Y}$	$[1]$
$\mathcal{LZ}$	$\mathbf{L}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
$\mathcal{RZ}$	$\mathbf{R}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{NB}$	$\mathbf{N}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{B}$	$\mathbf{B_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{LNB}_2$	$\mathbf{L_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{RNB}_2$	$\mathbf{R_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{NB}_2$	$\mathbf{N_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{A}$	$\mathbf{A_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

1. TÁBLÁZAT

pontosan akkor kombinatorikus, ha $\mathbf{G}$ triviális ($G = \{1\}$). Ebben az esetben a nem 0 elemek $(i, 1, \lambda)$ alakúak, így törölhetjük a középső komponenst az elemhármasból, és helyette (i, λ)-t írunk. Az M mátrix csak 0-t és 1-et tartalmaz, és a művelet is egyszerűsödik:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = \begin{cases}(i,\mu), & \text{ha } m_{\lambda,j} = 1,\\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j} = 0,\end{cases}$$
$$(i,g,\lambda)0 = 0(i,g,\lambda) = 00 = 0.$$

N. Reilly [41] leírta a teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások hálóját. Bizonyította, hogy pontosan 9 olyan varietás van, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak. Ezen varietások mindegyike generálható egyetlen véges kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttal. Az 1. táblázatban látható, hogy ezek mely mátrixokhoz tartoznak. Ezen varietások szabad spektruma ismert.

Az ötelemű A_2 az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ szendvicsmátrixhoz tartozó Rees-mátrix félcsoport. Elemei tehát a $0, [1,1], [1,2], [2,1], [2,2]$. A 0 itt nullelem, vagyis bármivel szorozva 0-t kapunk. A fentiek szerint a többi elemre vonatkozó szorzási szabály a következő:

$$[\lambda, i][\mu, j] = \begin{cases} 0 & \text{ha } \mu = i = 2; \\ [\lambda, j] & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen adott egy n-elemű ábécé, elemei $x_1, \ldots, x_n$. Ezekből képezhetők véges szavak, pl. $x_2x_7x_1x_1x_2$. Mint tudjuk, két szót ekvivalensnek nevezünk A_2 felett, ha tetszőleges A_2 feletti behelyettesítés ugyanazt az eredményt adja. Könnyű ellenőrizni például, hogy x_1^2 és x_1^3 ekvivalensek A_2 felett. Kicsit tovább tart, de szintén ellenőrizhető, hogy $x_1x_3x_1x_2$ ekvivalens $x_1x_2x_1x_3x_1x_2$-vel. Általában a következő kombinatorikai jellemzés adható. Két szó pontosan akkor ekvivalens, ha ugyanaz a kezdőbetűjük, ugyanarra a betűre végződnek, és a két szóban megegyeznek a követések, vagyis tetszőleges x_i, x_j (nem feltétlenül különböző) változók esetén ha az egyik szóban közvetlenül követi x_i-t az x_j, akkor a másik szóban is. Ez alapján becsülhető az n-elemű szavak száma ekvivalencia erejéig. Kátai and Szabó [23] bebizonyították, hogy az A_2 által generált varietás szabad spektruma $n^2 2^{n^2}$.

Mi az A_2^1 által generált varietás szabad spektrumára adunk alsó- és felső becslést.

3.1 A_2^1 SZABAD SPEKTRUMA

Az A_2^1 félcsoport az A_2 egységelemes bővítése. Azaz a meglévő öt elemhez hozzávesszük az 1 szimbólumot, amit bármelyik elemmel szorozva az adott elemet kapjuk eredményül. Seif és Szabó [43] megoldotta a szóproblémát $\mathcal{V}(A_2^1)$-ben: A fentiekhez hasonlóan definiálható, hogy két szó mikor ekvivalens A_2^1 felett. Ez visszavezethető az A_2 feletti ekvivalencia vizsgálatára. Legyen u egy $\mathcal{V}(A_2^1)$-beli szó. Tegyük fel, hogy egy adott behelyettesítésben k változó helyébe 1-et, a többibe A_2-beli elemet helyettesítünk. Ekkor a végeredmény megkapható úgy, hogy elhagyjuk azokat a változókat, amikbe 1-et helyettesítettünk, a megmaradt szót pedig A_2 felett kiértékeljük az adott behelyettesítés szerint. A fentiek alapján így $(n-k)^2 2^{(n-k)^2}$ különböző szót kapunk. A k változót $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk ki. Ebből rögtön adódik a triviális

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^1)}(n)| \leq (n!)^2 2^{\sum \binom{n}{k}(n-k)^2}$$

becslés. Hosszútávon azonban célravezetőbb egy másik megközelítése a szóproblémának. Legyen $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ és X^+ a szabad félcsoport X felett.

7. Definíció. Legyen $u \in X^+$ tetszőleges szó. Egy (x_i, x_j) rendezett párra tekintsük a szóban az összes olyan előfordulását x_i-nek és x_j-nek, amik között sem x_i, sem x_j nem szerepel. Az x_i és x_j minden ilyen szomszédos előfordulásához vegyük azon változók halmazát, amik a kettő között előfordulnak. Jelöljük $H_{i,j}$-vel azt a halmazt, amit ezen halmazok alkotnak. Álljon $K_{i,j}$ a $H_{i,j}$ minimális elemeiből.

Például, az $u = x_1x_2x_3x_1x_2x_4x_3x_3x_1x_2x_5x_2x_4x_3x_1x_1x_5x_4x_6x_5x_3x_6$ szóban

$$H_{1,3} = \{\{x_2\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}$$

és

$$K_{1,3} = \{\{x_2\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}.$$

Seif és Szabó megmutatták, hogy egy n-változós szó A_2^1 feletti ekvivalenciaosztályát lényegében meghatározzák a $K_{i,j}$ halmazok.

8. Tétel. *(Seif, Szabó [43]) Legyenek u és v szavak. Ekkor $u \sim v$ pontosan akkor, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

(1) *A változók első előfordulás szerinti sorrendje u-ban és v-ben ugyanaz.*
(2) *A változók utolsó előfordulás szerinti sorrendje a u-ban és v-ben ugyanaz.*
(3) *A $\{K_{i,j} \mid 1 \le i, j \le n\}$ halmazok u-ban és v-ben megegyeznek.*

Ebből rögtön adódik egy természetes alsó- és felső becslés $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^1)}(n)|$-re. Az alsó becslés a következő konstrukción alapul: Választunk egy változót, például x_1-t. A maradék $n-1$ változóból álló halmaz részhalmazaiból elkészítjük az összes lehetséges antiláncot. Leírjuk az

$$x_1 ... x_1 x_1 .... x_1 x_1 ... x_1 x_1 ... x_1$$

sorozatot, kiválasztunk egy antiláncot, és az x_1-ek közé beírjuk az elemeit: az antilánc minden elemének az elemeit tetszőleges sorrendben beírjuk két x_1 közé. Ezáltal annyi különböző kifejezést gyártottunk, ahány antilánc van egy $n-1$ elemű halmazon. Korshunov [25] megmutatta, hogy n elemű halmaz antiláncainak számának logaritmusa aszimptotikusan $\sim \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \sim \frac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$. Azaz

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^1)}(n)| \ge 2^{\frac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}}.$$

A felső becsléshez az n változóból álló halmaz részhalmazaiból készítünk antiláncokat. Majd vesszük mind az n^2 változópárt, és minden változópár közé beírjuk egy-egy antilánc elemeit. Így (antiláncok száma)$^{n^2}$ db kifejezésünk van, de még a változók első- és utolsó előfordulásának sorrendje is számít, azaz gyártottunk (antiláncok száma)$^{n^2} \times n!^2$ db szót, amik persze nem mind különbözők. Ily módon minden ekvivalenciaosztályt előállítottunk, így

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{V}(A_2^1)}(n)| \leq \left(2^{\frac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}}\right)^{n^2} \cdot n!^2.$$

Azonban itt a két becslés logaritmusának hányadosa nagy, aszimptotikusan n^2. Azóta többen foglalkoztak azzal, hogy meghatározzák $\mathcal{V}(A_2^1)$ szabad spektrumát, sikertelenül. A mi célunk az előző becslés megjavítása, minél pontosabb alsó- illetve felső becslés megadása a szavak ekvivalenciaosztályainak számára.

Legyen u egy n-változós szó. Írjuk fel u összes összefüggő részszavát, majd minden részszóhoz készítsük el az első betűjéből és a benne lévő betűk halmazából álló rendezett párt.

9. Állítás. *Az így definiált rendezett párok meghatározzák a $K_{i,j}$ halmazokat minden $i \neq j$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen x_i, x_j rögzített, és tegyük fel, hogy $i \neq j$. Vegyük ki a rendezett párokból azokat, amik x_i-vel kezdődő részszóhoz tartoznak és a betűkészletük tartalmazza x_j-t. Jelöljük $M_{i,j}$-vel ezen rendezett párok második koordinátáiból álló halmazrendszer minimális elemeit. Bebizonyítjuk, hogy $K_{i,j} = M_{i,j}$. Ha egy H halmaz benne van $K_{i,j}$-ben, akkor a szóban van egy összefüggő részszó, ami x_i-vel kezdődik, x_j-vel végződik, és a két változó között éppen a H-beli elemek fordulnak elő. Ehhez a részszóhoz tartozik egy rendezett pár, amiben a kezdőbetű x_i és a betűkészlet tartalmazza x_j-t. Ha ennek a második koordinátája, L, nem lenne minimális, azaz nem lenne eleme $M_{i,j}$-nek, akkor lenne egy halmaz, ami része L-nek és $M_{i,j}$-beli, de ekkor H nem lenne eleme $K_{i,j}$-nek.

Most legyen $J \in M_{i,j}$. Ekkor van egy x_i-vel kezdődő részszó, ami tartalmazza x_j-t és éppen a J-beli betűkészletben szereplő változók fordulnak benne elő. Vegyük a legrövidebb részszót ezzel a tulajdonsággal. Ha az nem x_j-re végződne, akkor elhagyva az x_j első előfordulása utáni részét egy olyan részszóhoz jutnánk, ami rövidebb az előzőnél, szintén x_i-vel kezdődik és a betűkészlete is tartalmazza x_j-t. Ez csak úgy lenne lehetséges, ha a betűkészlete szigorú részhalmaza lenne az előbbi részszóénak, ami ellentmondana J minimalitásának.

$\square$

Vegyük észre, hogy minden $K_{i,j}$ halmaz egy antilánc az n-elemű változóhalmaz felett. Ha az antiláncok számát a_n-nel jelöljük, akkor $\log_2 a_n \sim \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Legyen a különböző n-változós szavak száma $p_n(\mathcal{V}(A_2^1))$. A fentiek alapján a következő felső becslés adható.

10. Tétel. $\log_2 p_n(\mathcal{V}(A_2^1)) \le n2^n + O(\sqrt{n}2^n)$.

Bizonyítás. A változók sorrenje n!-féle lehet. Így az első- és utolsó bekerülés szerinti sorrend együttesen $n!^2$-féleképpen képzelhető el, aminek logaritmusa $O(n \log_2 n)$. A $K_{i,i}$ alakú halmazok mindegyike antilánc, így külön-külön legfeljebb $2^{O(\frac{2^n}{\sqrt{n}})}$ halmazból kell kiválasztani ezeket. Együttesen tehát legfeljebb $2^{O(n\frac{2^n}{\sqrt{n}})}$ lehetőség van ezen halmazok választására, ennek logaritmusa $O(\sqrt{n}2^n)$. Végül a $K_{i,j}$ $(i \ne j)$ alakú halmazokat meghatározzák az 9. Állítás előtt definiált rendezett párok, vagyis számuk legfeljebb 2^{n2^n}. Így $2^{n2^n+O(\sqrt{n}2^n)}$ nem feltétlenül különböző n változós szót kaptunk.

□

Ahhoz, hogy alsó becslést adjunk a szavak számára, mutatnunk kell elegendően sok páronként nem ekvivalens szót.

11. Tétel. $\log_2 p_n(\mathcal{V}(A_2^1)) = \Omega(\sqrt{n}2^n)$.

Bizonyítás. Legyen $x_n = y$ a segédváltozónk. Legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ tetszőleges antiláncok az $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ halmazon. Nevezzük az $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ antiláncrendszert helyesnek, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) $H \in L_i$ esetén $x_i \notin H$ és $|H| = \left[\frac{n-2}{2}\right]$.
(2) Nincs olyan x_j, ami L_i minden elemének eleme.

Első lépésként megmutatjuk, hogy a helyes antiláncrendszerek száma $2^{n\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(1+o(1))}$. Az L_i antiláncok egymástól függetlenül megválaszthatók, így a helyes antiláncrendszerek számát megkaphatjuk, ha megadjuk, hogy egy L_i antiláncot hányféleképpen választhatunk meg, és ezt az $(n-1)$-edik hatványra emeljük. Jelölje S_i az L_i antilánc választásainak lehetséges számát. Ekkor

$$S_i \le 2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}},$$

hisz az (1) tulajdonság miatt $n-2$ változóból képezünk $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ elemű részhalmazokat. Az alsó becsléshez figyelembe kell vennünk a (2) tulajdonságot is. Az (1)-nek eleget tevő antiláncok számából kivonjuk azokat, melyekre van olyan x_j, ami L_i minden elemének eleme. Ilyenkor x_j-t $n-2$ féleképpen lehet kiválasztani, és a maradék $n-3$ változóból kell még $\left[\frac{n-2}{2}\right]-1$. Így azt kapjuk, hogy

$$2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}-(n-2)2^{\binom{n-3}{\left[\frac{n-2}{2}\right]-1}}\leq S_i.$$

Azaz

$$2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}-(n-2)2^{\binom{n-3}{\left[\frac{n-2}{2}\right]-1}}\leq S_i\leq 2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}.$$

A baloldalt rendezve összevonásokkal az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}-(n-2)2^{\binom{n-3}{\left[\frac{n-2}{2}\right]-1}}= \\
&\qquad=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}-2^{\binom{n-3}{\left[\frac{n-2}{2}\right]-1}+log_2(n-2)}= \\
&\qquad=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}(1-2^{(-\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n}))\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}+o(1)\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}})= \\
&\qquad=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}(1-2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-\frac{1}{2}+o(1))}).
\end{aligned}$$

Most bebizonyítjuk, hogy $x\to-\infty$ esetén $1-2^x\geq 2^{-2^{x+1}}$. Az $e^y\geq 1+y$ összefüggést felhasználva az $y=\varepsilon log4$ helyettesítéssel

$$4^\varepsilon=e^{\varepsilon log4}\geq 1+\varepsilon log4\geq 1+\varepsilon\geq\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Most ε helyébe 2^x-et írva a kívánt egyenlőtlenség adódik.

Az $1-2^x\geq 2^{-2^{x+1}}$ egyenlőtlenséget $x=\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-\frac{1}{2}+o(1))$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}(1-2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-\frac{1}{2}+o(1))})=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}2^{-2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-\frac{1}{2}+o(1))}}= \\
&\qquad=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}2^{o(1)}=2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}+o(1)}.
\end{aligned}$$

Azaz megmutattuk, hogy

$$S_i = 2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}+o(1)}.$$

Ebből a független választás miatt a helyes antiláncrendszerek száma

$$(S_i)^{n-1} = (2^{\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}+o(1)})^{n-1} = 2^{(\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}+o(1))(1+o(1))n} =$$
$$= 2^{n\binom{n-2}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(1+o(1))}.$$

Azaz

$$\log(S_i)^{n-1} \sim n\frac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Most minden helyes $\mathcal{L}$ antiláncrendszerhez elkészítünk egy $u_{\mathcal{L}}$ szót úgy, hogy a $K_{i,i}$-beli $\left[\frac{n-2}{2}\right]$-elemű halmazok halmaza éppen L_i legyen. Az így kapott szavak mind különbözők. Ehhez a következő eljárást alkalmazzuk. Legyen $H_1^i, \ldots, H_{m_i}^i$ az L_i elemeinek egy felsorolása, úgy, hogy H_1^i nem tartalmazza x_{i-1}-et és $H_{m_i}^i$ nem tartalmazza x_{i+1}-et. Ez (2) miatt megtehető. Most minden $1 \leq i \leq n-1$-re elkészítjük a w_i szót úgy, hogy $w = w_i$-ben az $x = x_i$-hez tartozó $K = K_{i,i}$ halmaz $L = L_i$ legyen, és az összes többi $i \neq j$-re x_j bármely két előfordulása közt legalább $\left[\frac{n-2}{2}\right] + 1$ különböző változó szerepeljen.

A konstrukciót megmutatjuk

$$x = x_{n-1} \text{ és } L = L_{n-1} = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$$

esetén.

Első lépésként írjuk le a H_1 elemeit tetszőleges sorrendben, nevezzük az így kapott szót v_1-nek és írjuk be két x közé. Majd írjunk le egy y-t és egy x-et. Most készítsük el a H_2 halmazból a v_2 szót a következő módon: Tekintsük azokat a változókat, amik szerepeltek v_1-ben és írjuk v_2-ben ugyannyiadik helyre, mint ahol v_1-ben álltak. A maradék változókkal tetszőlegesen töltsük ki az üres pozíciókat. Leírjuk az így kapott v_2-t az eddig elkészített szó mögé, és írjunk mögé xyx-et. Hasonló módon módon járunk el $H_3, H_4, \ldots, H_m$ esetén is. Azaz, tegyük fel, hogy már megvan a v_i szó, és utána raktuk az xyx-et. Vesszük azokat a változókat, amik szerepeltek v_i-ben és írjuk v_{i+1}-ben ugyannyiadik helyre, mint ahol v_i-ben álltak. A maradék változókkal ismét tetszőlegesen töltsük ki az üres pozíciókat. Leírjuk az így kapott v_{i+1} szót az eddig elkészített szó mögé, és írjunk mögé xyx-et. Ezzel megkaptuk a w szót. Ugyanezzel az eljárással legyártjuk a $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ szavakat. Azért hogy w_i-ben az utolsó két x_i között ne szerepeljen x_{i+1} és w_{i+1}-ben az első két x_{i+1} között ne szerepeljen x_i meghosszabbítjuk w_i-t a következő módon: Keresünk egy H halmazt L_i-ből, melyben nem szerepel x_{i-1} és egy H' halmazt, melyben nem szerepel x_{i+1}. A fenti konstrukciónak megfelelően H-ból legyártjuk a v, H'-ből a v' szót H_1-hez illetve H_m-hez igazodva. Majd elkészítjük a $w_i' = x_i v x_i y w_i y x_i v' x_i$ szót. Végül leírjuk egymás mellé $w_1', w_2', \dots w_{n-1}'$ szavakat egy-egy y-nal elválasztva, így megkapjuk $u_{\mathcal{L}}$-t.

Vegyük észre, hogy ily módon ebben a szóban két x_i között mindig legalább $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ különböző elem fordul elő. A pontosan $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ elemű halmazok x_i két szomszédos előfordulása között éppen az L_i-beli halmazok. Így a $K_{i,i}$-beli $\left[\frac{n-2}{2}\right]$-elemű halmazok halmaza éppen L_i. Eszerint különböző helyes antiláncrendszerekhez különböző szavak tartoznak, amivel igazoltuk az alsó becslést. $\square$

Ezzel bebizonyítottuk az alábbi állítást.

12. Tétel. *Léteznek olyan c és d pozitív konstansok, melyekre*

$$2^{c\sqrt{n}2^n} \leq p_n(\mathcal{V}(A_2^1)) \leq 2^{n2^n + d\sqrt{n}2^n}.$$

4. Félhálók iterált szemidirekt szorzata

Ebben a részben félhálók iterált szemidirekt szorzata által generált varietásokkal foglalkozunk. Ehhez először néhány fogalmat és eredményt kell ismertetnünk. Bár ezek minden bevezető félcsoportkönyvben megtalálhatók, mi most Dolinka [11] cikkét vesszük alapul. Ezen fejezet eredményei [20]-ban olvashatók.

Algebrák egy osztályát pszeudovarietásnak nevezzük, ha az zárt homomorf képre, részképzésre és véges direkt szorzatra. Ez a varietásoktól annyiban különbözik, hogy ott tetszőleges végtelen direkt szorzatot is megengedünk. Pszeudovarietást alkotnak például a véges gyűrűk, a nilpotens csoportok vagy a teljesen egyszerű félcsoportok.

Ezek alapján véges félcsoportok egy pszeudovarietása véges félcsoportok homomorf képre, részképzésre és véges direkt szorzatra zárt osztálya. Jelöljék $\mathcal{R}$, illetve $\mathcal{L}$ a Green-relációkat. Két elem ekvivalens $\mathcal{R}$ szerint, ha ugyanazt a jobb főideált generálják, $\mathcal{L}$ szerint, ha ugyanazt a bal főideált generálják. Legyen továbbá $\mathcal{D} = \mathcal{R} \cup \mathcal{L}$. Jelölje DS az összes olyan véges M monoidból álló pszeudovarietást, amelyek minden reguláris $\mathcal{D}$-osztálya részfélcsoportja M-nek, ahol egy $\mathcal{D}$-osztály reguláris, ha minden eleme reguláris. Egy monoidot aperiodikusnak (vagy kombinatorikusnak) nevezünk, ha minden részcsoportja triviális. Az összes aperiodikus tagja DS-nek egy pszeudovarietást alkot, amit DA-val jelölünk. A DA pszeudovarietás tehát azokból a véges félcsoportokból áll, amelyek minden reguláris $\mathcal{D}$-osztálya aperiodikus. Ez azzal a feltétellel is karakterizálható, hogy minden reguláris $\mathcal{D}$-osztálya egy derékszögű köteg. Egy V monoid pszeudovarietás esetén jelölje EV az összes olyan M monoidból álló pszeudovarietást, amelyre $\langle E(M) \rangle$, M idempotenseinek $E(M)$ halmaza által generált részmonoidja M-nek, V-beli. Továbbá, véges csoportok H pszeudovarietása esetén legyen $\overline{H}$ az összes olyan véges monoid pszeudovarietása, amely részcsoportjai H-beliek. Végül, jelölje G_{nil} a véges nilpotens csoportok pszeudovarietását.

1. Sejtés. (Seif) Legyen M egy véges monoid. Ekkor M szabad spektrumának a logaritmusa pontosan akkor becsülhető felülről egy polinommal, ha $M \in EDA \cap \overline{G_{nil}}$.

Seif igazolta a sejtés odafele irányát.

13. Tétel. *(Seif* [42]*) Legyen M egy véges monoid. Ha $M \notin EDA \cap \overline{G_{nil}}$, akkor M szabad spektruma dupla exponenciális.*

Dolinka [9] először bebizonyította, hogy a sejtés igaz véges teljesen reguláris félcsoportokra. Egy félcsoportot teljesen regulárisnak nevezünk, ha a félcsoport csoportok uniója. Ezekről a félcsoportokról majd részletesebben is beszélünk az 5. Fejezetben.

14. Tétel. *(Dolinka [9]) Legyen M egy véges teljesen reguláris félcsoport. Ekkor M szabad spektrumának a logaritmusa pontosan akkor becsülhető felülről egy polinommal (azaz „kicsi"), ha M lokálisan ortodox és minden részcsoportja nilpotens.*

Egy S félcsoport lokálisan ortodox, ha minden $e \in S$ idempotensre az eSe részfélcsoport idempotensei félcsoportot alkotnak. Ekkor $\langle E(M)\rangle = E(M)$ és minden elem egy egyelemű részcsoportot alkot, azaz a tétel egybecseng az 1. Sejtéssel. A DA pszeudovarietás egy nagy rész pszeudovarietása az úgynevezett $\mathcal{R}$-triviális félcsoportok osztálya. Egy félcsoportot $\mathcal{R}$-triviálisnak nevezünk, ha minden elem különböző jobb főideált generál. Ennek a fejezetnek egyik fő eredménye a 31. Következmény amelyben bebizonyítjuk, hogy egy $\mathcal{R}$-triviális félcsoport szabad spektrumának logaritmusa kicsi.

Később Dolinka [11] igazolta az 1. Sejtés visszafele irányát minden $M \in DA$ monoidra. Ehhez felhasználta, hogy $DA = \cup_{t\geq 1} Sl^{(t)}$, ahol $Sl^{(t)}$ a bal-asszociált félháló monoidok t-szer iterált kétoldali szemidirekt szorzata [46], valamint az ezen fejezetben szereplő, félhálók iterált szemidirekt szorzatára vonatkozó eredményünket, amit most ismertetünk.

Ahogy a csoportok körében, félcsoportok közt is definiálható a szemidirekt szorzat. Az automorfizmus csoport helyét természetesen az endomorfizmus monoid veszi át. Legyenek $(S;\circ)$, $(T;\cdot)$ félcsoportok, $\varphi\colon T^1 \to \mathrm{End}S$ monoid homomorfizmus. Ekkor $S * T$ jelöli a két félcsoport szemidirekt szorzatát, ahol az alaphalmaz: $S \times T$, a művelet pedig az alábbi módon definiálható:

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 \circ \varphi(t_1)(s_2), t_1 \cdot t_2).$$

Legyenek $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ félcsoport varietások, ekkor a két varietás szemidirekt szorzata $\mathcal{U} * \mathcal{V}$ az $S * T$ alakú szemidirekt szorzatok által generált varietás, ahol $S \in \mathcal{U}$ és $T \in \mathcal{V}$, azaz

$$\mathcal{U} * \mathcal{V} = \langle S * T \mid S \in \mathcal{U}, T \in \mathcal{V}\rangle$$

Ezek alapján félcsoport varietások iterált szemidirekt hatványát a következő módon definiáljuk: $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}^{t+1} = \mathcal{V} * \mathcal{V}^t$.

Egy kommutatív, idempotens félcsoportot félhálónak nevezünk. A félhálókra úgy is gondolhatunk, mint olyan hálókra, amelyekből elhagyjuk az egyik műveletet. Jelölje a félhálók varietását $\mathcal{SL}$. Mi félhálók iterált szemidirekt hatványát vizsgáljuk. Jelölje $\mathcal{SL}^t$ a félhálók t-szer iterált szemidirekt szorzata által generált varietást. Ismert, hogy minden t-re az $\mathcal{SL}^t$ varietás lokálisan véges, sőt végesen generált, $\mathbf{F}_{\mathcal{SL}^t}(2t)$, és a varietás $2t$ elem által generált szabad algebrája, generálja [2]. Mivel a félhálók varietása $\mathcal{SL}$ benne van mindegyik $\mathcal{SL}^t$-ben, így egy n-változós szó meghatároz egy pontosan n-változós kifejezés függvényt. Emlékeztetőül, ez azt jelenti, hogy minden n-változós szó olyan kifejezés függvényt határoz meg, amely minden változójától függ.

Legyen $\mathcal{SL}^t(n)$ az n-változós kifejezések halmaza $\mathcal{SL}^t$-ben, és továbbra is jelölje $p_n(t)$ a pontosan n-változós kifejezések számát $\mathcal{SL}^t$-ben, így $|\mathcal{SL}^t(n)| = p_n(t)$.

4.1 REKURZÓ

Ebben a részben mutatunk egy új megközelítést a szóprobléma megoldására $\mathcal{SL}^t$-ben, és adunk egy rekurziót a pontosan n-változós szavak számára. Almeida [2] megadta $\mathcal{SL}^t$ egy azonosságbázisát: Továbbra is legyen $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ változók megszámlálható halmaza és X^+ (X^*) a szabad félcsoport (szabad monoid) X felett. Ekkor a következő típusú azonosságok alkotják $\mathcal{SL}^t$ egy azonosságbázisát:

$$u_{t-1} \dots u_1 x_i x_j = u_{t-1} \dots u_1 x_j x_i,$$
$$u_{t-1} \dots u_1 x_i^2 = u_{t-1} \dots u_1 x_i,$$

ahol az u_j-k X^+-beli szavak, minden u_i betűkészlete tartalmazza x_i-t és x_j-t, valamint $c(u_1) \subseteq \cdots \subseteq c(u_{t-1})$. Itt szokás szerint $c(w)$ jelöli w betűkészletét. Legyenek $u = w_0, w_1, \dots, w_r = v$ X^+-beli szavak, $u = v$ egy azonosság. Legyen továbbá Σ azonosságok egy halmaza. Azt mondjuk, hogy az

$$(u =)w_0, w_1, \dots, w_r(= v) \tag{11}$$

sorozat az $u = v$ azonosság dedukciója egy Σ azonossághalmazból, ha minden $j \in \{0, \dots, r-1\}$-re léteznek az alábbi faktorizációk:

$$w_j = a_j(\varphi_j u_j)b_j \text{ és } w_{j+1} = a_j(\varphi_j v_j)b_j, \tag{12}$$

ahol

- $a_j, b_j, u_j, v_j \in X^*$
- a φ_j-k olyan $X^+ \to X^+$ homomorfizmusok, amelyek változók behelyettesítéseivel kaphatóak meg,
- $u_j = v_j$ vagy $v_j = u_j$ Σ-beli azonosság.

A dedukciót bal elnyelőnek nevezzük, ha minden (12)-ben fellépő a_j előtag az üres szó. Azt mondjuk, hogy a dedukció nem tartalmaz helyettesítést, ha minden φ_j homorfizmus az identitás függvény. A következő eredmény [2]-ban olvasható (Lemma 10.3.4. és Tétel 10.3.6.).

15. Tétel. *(Almeida [2]) Legyen $t \geq 2$. Ekkor Σ_{t-1} azonosságbázisa $\mathcal{SL}^t$-nek. Továbbá, tetszőleges X^*-beli u, v esetén $\mathcal{SL}^t \models u = v$ akkor és csak akkor, ha létezik $u = v$-nek olyan Σ_{t-1}-beli dedukciója, ami bal elnyelő és nem tartalmaz helyettesítést.*

Azaz, ha $\mathcal{SL}^t \models u = v$, akkor létezik egy $u = w_0, w_1, \ldots, w_r = v$ dedukció, amelyben minden $w_j = w_{j+1}$ a következő azonosságok valamelyike

$$u_{t-1} \ldots u_1 xyw = u_{t-1} \ldots u_1 yxw \tag{13}$$

$$u_{t-1} \ldots u_1 x^2 w = u_{t-1} \ldots u_1 xw, \tag{14}$$

ahol $x, y \in X$, $w \in X^*$, $u_j \in X^+$ ($j \in \{1, \ldots, t-1\}$) és $x, y \in c(u_1) \subseteq \cdots \subseteq c(u_{t-1})$.

Bár a feltételek közt szerepel, hogy az u_j-k ne lehessenek üresek, ez automatikusan adódik az $x \in c(u_j)$ feltételből. Egy (13) vagy (14) típusú lépést t-edik szintű elemi lépésnek hívunk. Mostantól, $u \sim_t v$ jelölje $\mathcal{SL}^t \models u = v$-t X^*-beli u, v-kre. Almeida [2] 10.3.5. Lemmája szerint

16. Lemma. *(Almeida [2]) $u \sim_t v$ és $c(v) = c(u) \subseteq c(w)$-ből következik $wu \sim_{t+1} wv$.*

Használni fogjuk még, hogy bármely $u, v, w \in X^*$ kifejezésekre és $t \geq 2$-re $u \sim_t v$-ból következik $uw \sim_t vw$. Végül, bevezetünk egy jelölést, amire sokszor szükségünk lesz az 4.2 és a 4.3 Fejezetekben.

17. Elnevezés. Legyen $u \in X^+$ egy kifejezés. Legyen m_u az szóban utoljára megjelenő változó. Legyen f_u az u szó eleje, az m_u előtti része és b_u az u szó vége, m_u első előfordulása utáni része.

Ekkor $u = f_u m_u b_u$, ahol $c(f_u) = c(u) \setminus \{m_u\}$. Vegyük észre, hogy b_u akkor az üres szó, ha egy változó csak u végén szerepel, és f_u akkor az üres szó, ha u csak egy változót tartalmaz.

18. Tétel. *Legyen $t \geq 2$ és u és v két X^+-beli kifejezés, melyekre $c(u) = c(v)$. Ekkor $u \sim_t v$ akkor és csak akkor, ha a következő feltételek teljesülnek:*

(i) $m_u = m_v$,
(ii) $f_u \sim_t f_v$,
(iii) $b_u \sim_{t-1} b_v$.

Bizonyítás. ($\Leftarrow$) Definíció szerint minden X^+-beli w szóra $c(f_w m_w) = c(w) \supseteq c(b_w)$ teljesül, így (i), (ii), a 16. Lemma és $c(u) = c(v)$ feltételekből következik, hogy $u = f_u m_u b_u \sim_t f_u m_u b_v = f_u m_v b_v$. Mivel $\sim_t$ egy kongruencia, (ii)-ből adódik, hogy $f_u m_v b_v \sim_t f_v m_v b_v = v$. Azaz, $u \sim_t v$.

($\Rightarrow$) Elegendő a feltételeket arra az esetre bizonyítani, amikor $u = v$ egy t-edik szintű elemi lépés. Utána egy $\mathcal{SL}^t$-ben teljesülő azonosság dedukciójának hosszára vonatkozó indukcióval az általános esetben is megkapjuk az állítást.

Először egy (14)-es típusú elemi lépéssel foglalkozunk. Legyenek

$$u = u_{t-1} \dots u_1 x^2 w,$$
$$v = u_{t-1} \dots u_1 x w,$$

ahol $x \in X$, $u_1, \dots, u_{t-1} \in X^+$, $w \in X^*$, és $x \in c(u_1) \subseteq \dots \subseteq c(u_{t-1})$. Itt w lehet az üres szó. Két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. Eset $c(u_{t-1}) = c(u)$. Ekkor az összes u-beli változó szerepel u_{t-1}-ben, így m_u is. Tehát m_u első előfordulása is u_{t-1}-be esik, ezért nyilván $m_u = m_{u_{t-1}}$. Emiatt f_u kezdőszelete u_{t-1}-nek és $f_u = f_{u_{t-1}}$. Így $f_u m_u = f_{u_{t-1}} m_{u_{t-1}}$.

Mivel $c(u) = c(v)$, $f_v m_v$ is előtag u_{t-1}-ben. Ebből következik, hogy

$$m_u = m_v = m_{u_{t-1}}$$

és, következésképpen,

$$f_u = f_v = f_{u_{t-1}}.$$

Emiatt $u_{t-1} = f_u m_u s = f_v m_v s$, ahol $s = b_{u_{t-1}}$. Tehát

$$u = f_u m_u s u_{t-2} \dots u_1 x^2 w,$$
$$v = f_u m_u s u_{t-2} \dots u_1 x w.$$

Azaz

$$b_u = (s u_{t-2}) \dots u_1 x^2 w,$$
$$b_v = (s u_{t-2}) \dots u_1 x w.$$

A feltételek szerint $x \in c(u_1) \subseteq \dots \subseteq c(u_{t-2}) \subseteq c(u_{t-1})$, azaz

$$x \in c(u_1) \subseteq \dots \subseteq c(s u_{t-2}),$$

ezért a $b_u = b_v$ egy $t-1$-edik szintű elemi lépést alkot, és adódik, hogy

$$b_u \sim_{t-1} b_v,$$

tehát a feltételek teljesülnek.

2. Eset $c(u_{t-1}) \neq c(u)$. Mivel a feltételek szerint $x \in c(u_1) \subseteq \dots \subseteq c(u_{t-1})$, így $c(u_{t-1} \dots u_1 x^2) = c(u_{t-1} \dots u_1 x) = c(u_{t-1}) \neq c(u) = c(v)$. Ezért u és v utoljára megjelenő változójának első előfordulása

w-be esik, azaz m_u és m_v először w-ben szerepel. Legyen w' az a legrövidebb előtagja w-nek, amely rendelkezik a $c(u_{t-1}) \cup c(w') = c(u)$ tulajdonsággal. Ekkor $u_{t-1} \dots u_1 x^2 w'$ a legrövidebb előtagja u-nak u-val megegyező betűkészlettel, és $u_{t-1} \dots u_1 x w'$ a legrövidebb előtagja v-nek v-vel megegyező betűkészlettel. Így w' legjobboldali változója azonos m_u-val és m_v-vel is, tehát

$$m_u = m_v.$$

Legyen $w = w'w''$ és $w' = sm_u = sm_v$. Ekkor

$$b_u = b_v = w'',$$

valamint

$$f_u = u_{t-1} \dots u_1 x^2 s,$$
$$f_v = u_{t-1} \dots u_1 x s.$$

A $x \in c(u_1) \subseteq \cdots \subseteq c(u_{t-1})$ feltétel továbbra is teljesül, tehát az f_u, f_v szópár t-edik szintű elemi lépést alkot, amiből adódik, hogy

$$f_u \sim_t f_v,$$

ahogy állítottuk.

Egy (13)-as típusú elemi lépés esetén a tétel hasonlóan bizonyítható. Az egyetlen dolog, amit meg kell gondolni, hogy a 2. Esetben, amikor $c(u_{t-1}) \neq c(u)$, akkor se x se y nem lehet egyenlő m_u-val. Ám ez automatikusan teljesül az $x, y \in c(u_{t-1})$ feltétel miatt.

□

A 18. Tétel alapján minden n-változós szó $\mathcal{SL}^t$ fölött megadható, mint egy hármas. Ez a hármas egy $n-1$-változós $\mathcal{SL}^t$ fölötti szóból, egy változóból és egy legfeljebb n-változós (előfordulhat, hogy üres) $\mathcal{SL}^{t-1}$ fölötti szóból áll. Ez a kulcs a $p_n(t)$-re vonatkozó rekurzió bizonyításához.

19. Tétel. *A következő rekurzió teljesül a pontosan n-változós kifejezések számára:*

$$p_n(t) = np_{n-1}(t) \left|\mathbf{F}_{\mathcal{SL}^t}(2t)\right| = np_{n-1}(t) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(t-1). \tag{15}$$

Bizonyítás. $\mathcal{SL}^t$-ben minden n-változós kifejezés meghatároz egy pontosan n-változós kifejezés függvényt. Legyen u egy pontosan n-változós kifejezés $\mathcal{SL}^t$ fölött. A 18. Tétel alapján u-hoz bijektíven hozzárendelhető az f_u, m_u, b_u hármas, ahol f_u egy $(n-1)$-változós szó $\mathcal{SL}^t$-ben, m_u egy változó és b_u egy legfeljebb n-változós (lehet, hogy üres) szó $\mathcal{SL}^{t-1}$-ben. Megszámoljuk az ilyen hármasok számát. n választásunk van m_u-ra és $p_{n-1}(t)$ lehetőségünk f_u-ra. A legfeljebb n-változós szavak száma

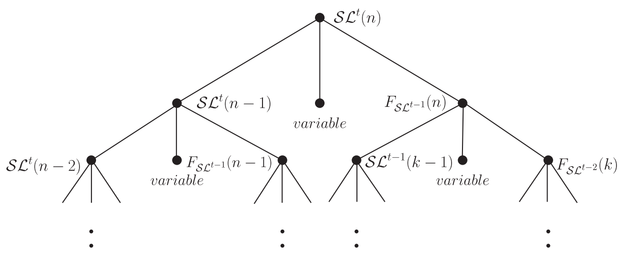
$\mathcal{SL}^{t-1}$ fölött az n elem által generált szabad algebra mérete $\mathcal{SL}^{t-1}$-ben, ami $|\mathbf{F}_{\mathcal{SL}^t}(2t)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k\,(t-1)$. Így $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k\,(t-1)$ választási lehetőségünk van b_u-ra. Azaz a (15) rekurziót megkaptuk.

□

4.2 NORMÁLFORMA

Ebben a részben $\mathcal{SL}^t$ (megszámlálható sok elem által generált) szabad algebrájának elemeire adunk normálformát. Látni fogjuk, hogy a normálforma hossza a változók számának polinomja lesz, valamint két normálforma szorzatának normálformája könnyen előállítható. Megmutatjuk azt is, hogy a normálforma mindig az ekvivalencia osztályának (egyik) legrövidebb eleme.

20. Konstrukció. A 18. tétel alapján minden $\mathcal{SL}^t$ fölötti n-változós kifejezés megadható egy hármasként. Ez a hármas egy $\mathcal{SL}^t$ fölötti $(n-1)$ változós szóból, egy változóból és egy $\mathcal{SL}^{t-1}$ fölötti legfeljebb n változós (lehet, hogy üres) szóból áll. Rendeljük ezt a hármast a szóhoz. Megjegyezzük, hogy ha összeszorozzuk ezeket az elemeket balról jobbra, akkor visszakapjuk az eredeti szót. Ezután ismételjük meg ezt az eljárást a hármas első és harmadik részére. Mindkettőhöz hozzárendelünk egy-egy újabb hármast. Így kapunk egy $\mathcal{SL}^t$ fölötti $(n-2)$ változós szóból, egy változóból és egy $\mathcal{SL}^{t-1}$ fölötti legfeljebb $n-1$ változós (lehet, hogy üres) szóból álló hármast, egy változót és egy $\mathcal{SL}^{t-1}$ fölötti $(n-1)$ változós szóból, egy változóból és egy $\mathcal{SL}^{t-2}$ fölötti legfeljebb n változós (lehet, hogy üres) szóból álló hármast. Ha ezeket az összetevőket egymás után írjuk, megkapjuk a kiindulási szavunkat.

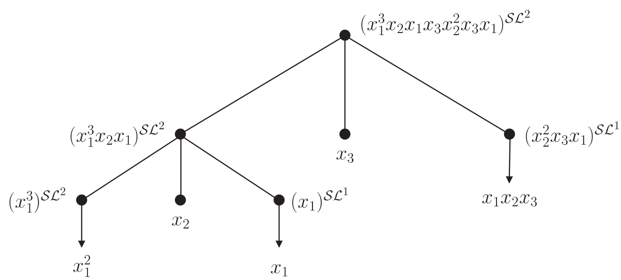


2. ÁBRA

Ha ezt az eljárást folytajuk, minden lépésben n vagy t értéke csökken. Így véges sok lépés után kapunk kifejezések egy sorozatát, amely $\mathcal{SL}^1$ fölötti szavakból, változókból és $\mathcal{SL}^s$ fölötti egyváltozós szavakból áll. Ha az eljárás során minden említett elemet összekötünk a neki megfelelő hármas elemeivel, akkor egy gyökeres fát kapunk, ahogy a 2. ábrán látható.

A 18. Tétel alapján ez a fa egyértelműen meghatározza az eredeti kifejezést, és a fa felépítése csak az eredeti kifejezés ekvivalenciaosztályától függ. Három fajta levél található a fán: egyváltozós $\mathcal{SL}^s$ fölötti szavak, valamilyen s-re, tetszőleges $\mathcal{SL}^1$ feletti szavak és változók. Az első két esetben a levélhez a ráírt szó legrövidebb normál formáját rendeljük. Azaz, az egyváltozós $\mathcal{SL}^s$-beli kifejezések esetén az x_i^k levélhez x_i^l-t rendelünk, ahol $l = \min\{k, s\}$. Mivel $\mathcal{SL}^s$-ben teljesül az $x^s = x^{s+1}$ azonosság, ez valóban az x_i^k elem legrövidebb $\mathcal{SL}^s$-beli formája. Az $\mathcal{SL}^1$ varietás a félhálók varietása, ezért egy tetszőleges $\mathcal{SL}^1$ fölötti w szóhoz rendelünk az $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ kifejezést, ahol a w -beli változók az indexük szerinti növekvő sorrendben vannak. Egy szó normálformáját a levelekhez rendelt szavak balról jobbra történő egymás mellé írásával definiáljuk.

A 3. ábrán egy példa látható, mely megmutatja, hogy az $\mathcal{SL}^2$-beli $x_1^3x_2x_1x_3x_2^2x_3x_1$ normálformája hogyan állítható elő. A normálformája $x_1^2x_2x_1x_3x_1x_2x_3$. A varietások a kifejezések jobb felső sarkában vannak feltüntetve.



3. ÁBRA

Jelölje az $\mathcal{SL}^t$ varietásbeli w szó normálformáját $\varphi_t(w)$. A következő algoritmus megadja φ_t-t rekurzív módon.

21. Algoritmus. Legyen w egy n változós szó.

(1) Ha $t = 1$, akkor legyen $\varphi_1(w) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$, ahol a w -beli változók az indexük szerinti növekvő sorrendben vannak.
(2) Ha $n = 1$ és $w = x_i^k$, akkor legyen $l = \min\{t, k\}$ és $\varphi_t\left(x_i^k\right) = x_i^l$.
(3) Egyébként legyen $\varphi_t(w)$ a $\varphi_t(f_w)$, m_w és $\varphi_{t-1}(b_w)$ kifejezések egymásutánja:

$$\varphi_t(w) = \varphi_t(f_w)\, m_w \varphi_{t-1}(b_w).$$

Itt jegyezzük meg, hogy az algoritmus során az (1), (2) és (3) lépéseket annyiszor végezzük el, ahány csúcsa van a fának a 20. Konstrukcióban. Ugyanis minden közbülső lépésben pontosan egy „középső csúcs” keletkezik, az utolsó lépésekben pedig vagy egy $\mathcal{SL}$-beli, vagy pedig egy $\mathcal{SL}^t$-beli egyváltozós kifejezés normálformáját írjuk a csúcsra.

Most megmutatjuk, hogy minden kifejezéshez egyértelmű normálformát rendeltünk, és hogy különböző kifejezéseknek különböző a normálformája.

22. Állítás. *Legyenek u, v n változós szavak. Ekkor $u \sim_t v$ akkor és csakis akkor ha $\varphi_t(u) = \varphi_t(v)$ (X^+-ban).*

Bizonyítás. Az állítást t és n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $t = 1$, akkor egy félhálóbeli szavunk van, és ehhez a lexikografikusan legkisebb szót rendeltük hozzá. Ha $n = 1$, akkor egy változós, x_i^k alakú kifejezésünk van, és akkor a lehető legkisebb l-t választottuk, amelyre teljesül, hogy $x_i^l = x_i^k$, tehát az állítás teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és $t \geq 2$.

Legyen $u \sim_t v$. A 18. Tétel szerint

$$f_u \sim_t f_v, \quad m_u = m_v \text{ és } b_u \sim_{t-1} b_v.$$

Az f_u, f_v kifejezések $n - 1$ változósak, ezért indukciós feltevés szerint $f_u \sim_t f_v$-ből következik, hogy

$$\varphi_t(f_u) = \varphi_t(f_v).$$

A b_u, b_v kifejezéseket már $\mathcal{SL}^{t-1}$ fölött kell tekinteni, így az indukciós feltétel alapján

$$\varphi_{t-1}(b_u) = \varphi_{t-1}(b_v)$$

adódik. A 21. Algoritmus (3). lépése alapján

$$\varphi_t(u) = \varphi_t(f_u)\, m_u \varphi_{t-1}(b_u) = \varphi_t(f_v)\, m_v \varphi_{t-1}(b_v) = \varphi_t(v).$$

Most tegyük fel, hogy $\varphi_t(u) = \varphi_t(v)$. A 21. Algoritmus (3). lépéséből kapjuk, hogy $m_u = m_v$, így $\varphi_t(f_u) = \varphi_t(f_v)$ és $\varphi_{t-1}(b_u) = \varphi_{t-1}(b_v)$. Az indukciós feltevés szerint $f_u \sim_t f_v$ és $b_u \sim_{t-1} b_v$. A 18. tételből $u \sim_t v$ adódik. □

23. Állítás. *Legyen u egy n változós szó az $\mathcal{SL}^t$-beli szabad algebrában. Ekkor $\varphi_t(u)$ a legrövidebb elem u ekvivalenciaosztályában.*

Bizonyítás. Az állítást t és n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n = 1$ vagy $t = 1$ esetén teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és $t \geq 2$, és legyen v egy eleme u ekvivalenciaosztályának. A 18. Tétel alapján $f_u \sim_t f_v$, $m_u = m_v$ és $b_u \sim_{t-1} b_v$. Az indukciós feltevés szerint $\varphi_t(f_u)$ eleme f_u ekvivalenciaosztályának és $\varphi_t(f_u)$ rövidebb, mint f_v. Hasonlóan, $\varphi_{t-1}(b_u)$ eleme b_u ekvivalenciaosztályának és $\varphi_{t-1}(b_u)$ rövidebb, mint b_v. A 18. tétel alapján $\varphi_t(u) = \varphi_t(f_u)\, m_u \varphi_{t-1}(b_u)$ eleme $u = f_u m_u b_u$ ekvivalenciaosztályának és rövidebb, mint $v = f_v m_v b_v$. Ebből rögtön következik az állítás. □

Végül felső becslést adunk a normálforma hosszára és a 21. Algoritmus szerint két normálforma szorzatának normálformájának előállításához szükséges időre.

24. Állítás. *Egy $\mathcal{SL}^t$ fölötti n változós szó normálformájának hossza legfeljebb $\binom{n+t}{t} - 1$. Ha adott két $\mathcal{SL}^t$ fölötti n változós szó normálformája, akkor a szorzatuk normálformája $O(n^{2t-1})$ idő alatt előállítható.*

Bizonyítás. Jelölje $M(n,t)$ egy $\mathcal{SL}^t$ fölötti n változós kifejezés normálformájának maximális hosszát. A 23. Állításból és a 21. Algoritmusból látható, hogy egy u szó $\mathcal{SL}^t$-beli normálformája akkor a leghosszabb, ha f_u $\mathcal{SL}^t$-beli normálformája és b_u $\mathcal{SL}^{t-1}$-beli normálformája a leghosszabbak. Ebből az

$$M(n,t) = M(n-1,t) + 1 + M(n,t-1)$$

összefüggés adódik, ahol a kezdeti értékek

$$M(1,t) = t \text{ és } M(n,1) = n.$$

Ennek a rekurziónak $M(n,t) = \binom{n+t}{t} - 1 = O(n^t)$ a megoldása.

Jelölje $L(n,t)$ a 20. Konstrukcióban levő normálformához tartozó fa leveleinek számát. Ismét a következő rekurzió írható fel:

$$L(n,t) = L(n-1,t) + L(n,t-1) + 1,$$

ahol a kezdeti értékek

$$L(n,1) = L(1,t) = 1.$$

Ennek a rekurziónak $L(n,t) = 2\binom{n+t-2}{t-1} - 1 = O(n^{t-1})$ a megoldása. A fa minden nem-levél csúcsa pontosan egy levél szülője, így az 20. Konstrukcióban levő fának pontosan $2L(n,t) = 4\binom{n+t-2}{t-1} - 2 = O(n^{t-1})$ csúcsa van. A nem-levél csúcsok száma egyenlő az 21. Algoritmusban levő lépések számával. Legyen u és v két n változós normálforma $\mathcal{SL}^t$-ben, ekkor a hosszuk legfeljebb $O(n^t)$. Az (1), (2) és (3) lépéseket

$O(n^{t-1})$-szer alkalmaztuk. Minden alkalommal a következő rekurziós lépés argumentumának előállításához a szó hosszában lineáris időre van szükség, azaz $O(n^t)$ időre. Így a 21. Algoritmus uv-n $O(n^{2t-1})$ ideig tart. $\square$

4.3 A SZABAD SPEKTRUM

Ennek a fejezetnek a célja, hogy explicit képletet adjunk az $\mathcal{SL}^t$ varietások p_n sorozatára és szabad spektrumára. A kis varietásokban a szabad félcsoport mérete nagy pontossággal meghatározható.

25. Állítás. *A pontosan n változós kifejezések száma $\mathcal{SL}^1$-ben*

$$p_n(1) = 1 \tag{16}$$

Bizonyítás. Mivel a szabad félháló bármely elemét meghatározza a változóinak halmaza, így $p_n(1) = 1$. $\square$

26. Állítás. *A pontosan n változós kifejezések száma $\mathcal{SL}^2$-ben*

$$p_n(2) = n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} \tag{17}$$

Bizonyítás. Mivel a varietásban teljesül az $x^2 = x^3$ azonosság, így $p_1(2) = 2$ teljesül. Az (15)-ös egyenlőség többszörös használatából megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_n(2) = n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(1)\right)p_{n-1}(2) &= \\
= n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(1)\right)(n-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p_k(1)\right)p_{n-2}(2) &= \\
= n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(1)\right)(n-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p_k(1)\right)\cdots & \\
\cdots 2\cdot\left(\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\right)1\cdot\left(\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\right)p_0(2) &= \\
= n!\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}p_k(1)\right) = n!\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\right) = n!\prod_{i=1}^{n}2^i = n!\cdot 2^{\binom{n+1}{2}} &
\end{aligned}$$

$\square$

27. Következmény. $|F_{\mathcal{SL}^1}(n)| = 2^n - 1$ *és* $|F_{\mathcal{SL}^2}(n)| = n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} + O(n! \cdot 2^{\binom{n}{2}})$.

Bizonyítás. A $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathcal{V})$ összefüggés és a (17) alapján

$$|F_{\mathcal{SL}^1}(n)| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_n(1) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n - 1.$$

A $t = 2$ esetben hasonló érvelések alkalmazhatóak:

$$|F_{\mathcal{SL}^2}(n)| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! \cdot 2^{\binom{i+1}{2}} =$$

$$= n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} + n(n-1)! \cdot 2^{\binom{n}{2}} + \binom{n}{2}(n-2)! \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} + \sum_{i=1}^{n-3} \binom{n}{i} i! \cdot 2^{\binom{i+1}{2}} =$$

$$= n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} + n! \cdot 2^{\binom{n}{2}} + \frac{n!}{2} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} + \sum_{i=1}^{n-3} n(n-1)\cdots(n-i+1) 2^{\binom{i+1}{2}} =$$

$$= n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} + O\left(n! \cdot 2^{\binom{n}{2}}\right) + O\left(2^n n! \cdot 2^{\binom{n-2}{2}}\right) =$$

$$= n! \cdot 2^{\binom{n+1}{2}} + O\left(n! \cdot 2^{\binom{n}{2}}\right)$$

□

Annak ellenére, hogy $p_n(2)$-re kaptunk egy szép zárt képletet, reménytelen, hogy $|F_{\mathcal{SL}^2}(n)|$-re is adjunk egyet. Ráadásul $\mathcal{SL}^3$ esete még ennél is bonyolultabb.

28. Állítás. *Létezik egy $\alpha > 1$ konstans és valós számok monoton növő sorozata $\alpha_n \to \alpha$, hogy*

$$p_n(3) = \alpha_n n! (\prod_{i=1}^{n} i!) 2^{\binom{n+2}{3}}$$

.

Bizonyítás. Az (15) rekurzió és a (17) képlet alapján

$$p_k(3) = p_{k-1}(3) k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} i! \cdot 2^{\binom{i+1}{2}}.$$

A számolások leegyszerűsítése miatt definiáljuk ε_k-t a következő módon:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} i! \cdot 2^{\binom{i+1}{2}} = p_k(2)(1 + \varepsilon_k). \tag{18}$$

A rekurzió a következőképpen bontható ki:

$$
\begin{aligned}
p_n(3) &= p_{n-1}(3) n p_n(2)(1+\varepsilon_n) = \\
&= p_{n-2}(3) n(n-1) p_n(2) p_{n-1}(2)(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n-1}) = \cdots = \\
&= n!\left(\prod_{i=2}^{n} p_i(2)(1+\varepsilon_i)\right) p_1(3) = n!\left(\prod_{i=2}^{n} i!\cdot 2^{\binom{i+1}{2}}(1+\varepsilon_i)\right) p_1(3) = \\
&= \frac{3}{2} n!\left(\prod_{i=1}^{n} i!\right) 2^{\binom{n+2}{3}} \prod_{i=2}^{n}(1+\varepsilon_i).
\end{aligned}
$$

(18)-ből $\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(i+1)!} 2^{-(i+1)(2k-i)/2} < \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-k-i} < 2^{1-k}$ ($k \geq 2$-re). Felhasználva az $1+x < e^x$ egyenlőtlenséget

$$
\prod_{i=2}^{n}(1+\varepsilon_i) < \prod_{i=2}^{n} e^{\varepsilon_i} < \prod_{i=2}^{n} e^{2^{1-i}} < e
$$

adódik. Így $\alpha_n = \frac{3}{2}\prod_{i=2}^{n}(1+\varepsilon_i) < \frac{3}{2}e$, és az állítást bebizonyítottuk.

□

Megjegyezzük, hogy $\alpha = 1,70506\ldots$

29. Következmény. *Létezik valós számoknak egy $\beta_n \to \alpha$ sorozata, hogy*

$$
|F_{\mathcal{SL}^3}(n)| = \beta_n n!(\prod_{i=1}^{n} i!) 2^{\binom{n+2}{3}}.
$$

Ebből az alábbi logaritmikus becslés adódik:

$$
\log_2 |F_n(3)| = \binom{n+2}{3} + \frac{1}{2\log 2}\cdot n^2 \log n + O(n^2).
$$

Bizonyítás. A 28. Állítás alapján $p_k(3) = \alpha_k k!(\prod_{i=1}^{k} i!) 2^{\binom{k+2}{3}}$. A tétel első fele igaz, mert $\frac{|F_{\mathcal{SL}^3}(n)|}{p_n(3)} \to 1$. Sőt

$$
\begin{aligned}
|F_{\mathcal{SL}^3}(n)| &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} p_i(3) = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\alpha_i i!\left(\prod_{j=1}^{i} j!\right) 2^{\binom{i+2}{3}} = \\
&= p_n(3)\left(1+O(2^{-n(n+1)/2})\right) = p_n(3)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

A második részben szereplő $\prod_{i=1}^{n} i!$-t szuperfaktoriálisnak hívjuk. A Stirling formulából adódik a következő jól ismert becslése a faktoriális és a szuperfaktoriális logaritmusára.

$$\log_2 \beta_n n! = O(n \log n),$$

$$\log_2 \left(\prod_{i=1}^{n} i! \right) = \frac{1}{2\log 2} \cdot n^2 \log n + O(n^2). \tag{19}$$

Ezt behelyettesítve a $|F_{\mathcal{SL}^3}(n)| = \beta_n n! (\prod_{i=1}^{n} i!) 2^{\binom{n+2}{3}}$ formulába kapjuk, hogy

$$\log_2 |F_{\mathcal{SL}^3}(n)| = \binom{n+2}{3} + \frac{1}{2\log 2} \cdot n^2 \log n + O(n^2).$$

$\square$

30. Tétel. *Az $\mathcal{SL}^t$ varietás p_n sorozatára a következő aszimptotikus becslés teljesül $t \geq 3$ esetén:*

$$\log_2 p_n(t) = \binom{n+t-1}{t} + \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(t-1)!} \cdot n^{t-1} \log n + O_t(n^{t-1})$$

Bizonyítás. Definiáljuk az

$$a_n(t) = \left(\prod_{i_1=1}^{n} \prod_{i_2=1}^{i_1} \cdots \prod_{i_{t-2}=1}^{i_{t-3}} i_{t-2}! \right) 2^{\binom{n+t-1}{t}}$$

és

$$b_n(t) = e^{n^{t-2} \log n}$$

sorozatokat.

Most bebizonyítjuk, hogy

$$a_n(t) \leq p_n(t) \leq a_n(t) b_n(t) \qquad t \geq 3, n \geq 2 \text{ esetén}, \tag{20}$$

majd megbecsüljük $\log a_n(t)$-t.

Az alsó becsléshez először ellenőrizzük az $n = 2$ esetet. Nyilvánvalóan, $a_2(t) = 2^{t+2}$ és $p_2(2) = a_2(2) = 16$, így $a_2(t) \leq p_2(t)$ igaz $t = 2$-re. t szerinti indukcióból és az (15) rekurzióból

$$p_2(t) = 2t(p_2(t-1) + 2(t-1) + 1) \geq 2p_2(t-1) \geq 2a_2(t-1) = a_2(t)$$

adódik, így $a_2(t) \leq p_2(t)$ teljesül minden $t \geq 2$-re.

A $a_n(t) \leq p_n(t)$ egyenlőséget t szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $t = 3$ eset a 28. Állításból következik, hiszen $\alpha_n > 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $t \geq 3$-ra.

A $p_n(t)$-re vonatkozó (15) rekurzióból következik, hogy

$$p_n(t+1) = p_{n-1}(t+1)n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p_i(t) \geq p_{n-1}(t+1)p_n(t) \geq \cdots \geq$$
$$\geq p_n(t)p_{n-1}(t)\cdots p_2(t)p_1(t+1).$$

Az indukciós feltevés szerint $2 \leq k \leq n$ esetén

$$a_k(t) \leq p_k(t) \text{ és } p_1(t+1) = t+1 \geq 2.$$

A $\prod\limits_{i=2}^{n} a_i(t) = \frac{1}{2}a_n(t+1)$ összefüggést felhasználva

$$p_n(t+1) \geq a_n(t)a_{n-1}(t)\cdots a_2(t)\cdot 2 = a_n(t+1).$$

Most (20) felső becslésével folytatjuk. Hasonlóan a 28. Állítás bizonyításához megbecsüljük $p_n(t)$ és a szabad algebra méretének hányadosát. Ehhez definiáljuk η_k-t: $\eta_k = \frac{|\mathbf{F}_t(k)|}{p_k(t)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{p_i(t)}{p_k(t)}$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}p_i(t)}{p_k(t)} = \prod_{k=2}^{n}(1+\eta_k) < e. \tag{21}$$

Az (15) rekurzióból

$$\frac{p_{i-1}(t)}{p_i(t)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{i}\binom{k}{j}p_j(t-1)} \leq \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{i}\binom{k}{j}} = \frac{1}{i2^i}.$$

Ekkor

$$\binom{k}{i}\frac{p_i(t)}{p_k(t)} = \binom{k}{i}\prod_{j=i+1}^{k}\frac{p_{j-1}(t)}{p_j(t)} \leq \frac{1}{(k-i)!}\cdot 2^{\binom{i+1}{2}-\binom{k+1}{2}} \leq 2^{i-2k+1},$$

így $\eta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{p_i(t)}{p_k(t)} < 2^{1-k}$. Felhasználva az $1+x < e^x$ egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\prod_{i=2}^{n}(1+\eta_i) < \prod_{i=2}^{n}e^{\eta_i} < \prod_{i=2}^{n}e^{2^{1-i}} < e.$$

t szerinti indukcióval haladva megmutatjuk, hogy $p_n(t) \leq a_n(t)b_n(t)$, ha $t \geq 3$, $n \geq 2$, kivéve $t = 4$ és $n = 2$ esetén. Az egyenlőtlenség

$p_n(t) \le a_n(t)b_n(t)$ világosan teljesül $t = 3$-ra (lásd 28. Állítás). A (15)-ös rekurzió és a (21)-es egyenlőtlenség alapján

$$(22)\quad p_n(t+1) = n!(t+1)p_n(t)p_{n-1}(t)\cdots p_2(t)\cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}p_i(t)}{p_k(t)} < \\ < n!(t+1)p_n(t)p_{n-1}(t)\cdots p_2(t)e.$$

Az indukciós feltevés szerint $p_j(t) \le a_j(t)b_j(t)$ bármely $2 \le j \le n$-re, kivéve ha $t = 4$, $j = 2$. A kivételes esetben

$$p_2(4) = 1064 \qquad \text{és } a_2(4)b_2(4) = 1024,$$

emiatt $p_2(4) \le 2a_2(4)b_2(4)$. Felhasználva ezeket a becsléseket

$$(23)\quad n!(t+1)p_n(t)p_{n-1}(t)\cdots p_2(t)e < \\ < n!(t+1)a_n(t)\cdots a_2(t)b_n(t)\cdots b_2(t)\cdot 2e = \\ = a_n(t+1)n!(t+1)e\prod_{i=2}^{n} b_i(t).$$

Így

$$(24)\qquad p_n(t+1) < a_n(t+1)n!(t+1)e\prod_{i=2}^{n} b_i(t).$$

Most (24) jobb oldalának logaritmusára adunk egy becslést. Az $x^{t-2}\log x$ függvény növő, ezért $\prod_{i=2}^{n} b_i(t)$ logaritmusára azt kapjuk, hogy

$$(25)\qquad \log\left(\prod_{i=2}^{n} b_i(t)\right) = \sum_{i=2}^{n} i^{t-2}\log i \le n^{t-2}\log n + \int_2^n x^{t-2}\log x,$$

ahol

$$(26)\quad \int_2^n x^{t-2}\log x \le \int_2^n x^{t-2}\log x + \frac{1}{t-1}x^{t-2} = \\ = \left[\frac{1}{t-1}x^{t-1}\log x\right]_2^n \le \frac{1}{t-1}n^{t-1}\log n.$$

(25)-ből és (26)-ből

$$\text{(27)}\quad \log \prod_{i=2}^{n} b_i(t) \le \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{t-1}\right) n^{t-1} \log n =$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{t-1}\right) \log b_n(t+1).$$

adódik. A következő egyenlőtlenség szintén teljesül:

$$\text{(28)}\quad \log(n!(t+1)e) \le n \log n + \log(t+1) + 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{n^{t-2}} + \frac{\log(t+1)}{n^{t-1}\log n} + \frac{1}{n^{t-1}\log n}\right) \log b_n(t+1).$$

(24) mindkét oldalának logaritmusát véve és (27)-t és (28)-t behelyettesítve megkapjuk, hogy $p_n(t+1) \le a_n(t+1) b_n(t+1)$, ha

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{n^{t-2}} + \frac{\log(t+1)}{n^{t-1}\log n} + \frac{1}{n^{t-1}\log n} \le 1.$$

Ez az egyenlőtlenség mindig fennáll, kivéve az

$$(n;t) = (2;3), (2;4), (2;5), (3;3), (4;3)$$

eseteket (feltesszük, hogy $n \ge 2$ és $t \ge 3$). A (2,4) esetet már tárgyaltuk. A többi értékekre:

$$p_2(3) = 126 \quad a_2(3) = 2^5 \quad b_2(3) = 2^2$$
$$p_2(5) = 10730 \quad a_2(5) = 2^7 \quad b_2(5) = 2^8$$
$$p_3(3) = 165942 \quad a_3(3) = 3 \cdot 2^{12} \quad b_3(3) = 3^3$$
$$p_4(3) = 104868 \cdot 165942 \quad a_4(3) = 3^2 \cdot 2^{25} \quad b_4(3) = 4^4$$

tehát

$$p_n(t) \le a_n(t) b_n(t)$$

teljesül a maradék négy esetben is. Így egy rögzített t-re $\log_2 p_n(t) = \log_2 a_n(t) + O(n^{t-2} \log n)$, ahol

$$\log_2 a_n(t) = \binom{n+t-1}{t} + \log_2 \left(\prod_{i_1=1}^{n} \prod_{i_2=1}^{i_1} \cdots \prod_{i_{t-2}=1}^{i_{t-3}} i_{t-2}! \right).$$

Most megmutatjuk, hogy

$$\log_2\left(\prod_{i_1=1}^{n}\prod_{i_2=1}^{i_1}\cdots\prod_{i_{t-2}=1}^{i_{t-3}} i_{t-2}!\right) = \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{(t-1)!}\cdot n^{t-1}\log n + O_t(n^{t-1}), \tag{29}$$

ami bebizonyítja a kívánt állítást.

A (29) egyenlőség bebizonyítható t szeinti indukcióval. $t = 3$ esetén ez a becslés a szuperfaktoriálisra (lásd (19)). Az indukciós lépésben megmutatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(t-1)!}\cdot i^{t-1}\log i + O_t(i^{t-1})\right) = \frac{1}{t!}\cdot n^t\log n + O_{t+1}(n^t). \tag{30}$$

Az $x^{t-1}\log x$ függvény monotonitásából és az integrál standard becsléséből

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(t-1)!}\cdot i^{t-1}\log i = \int_2^n \frac{1}{(t-1)!}\cdot x^{t-1}\log x + O_{t+1}(n^{t-1}\log n) =$$
$$= \frac{1}{t!}\cdot n^t\log n + O_{t+1}(n^{t-1}\log n)$$

adódik. Mivel $\sum_{i=1}^{n} O_t(i^{t-1}) = O_{t+1}(n^t)$, megkapjuk (30)-t, így az állítás teljesül.

$\square$

4.4 $\mathcal{R}$-TRIVIÁLIS FÉLCSOPORTOK

Emlékeztetőül véges félcsoportok pszeudovarietásának véges félcsoportok homomorf képre, részképzésre és véges direkt szorzatra zárt osztályát nevezzük. Jelölje Sl a véges félhálók pszeudovarietását, és bármely $t \geq 1$ esetén Sl^t legyen Sl elemeinek t-szer iterált szemidirekt szorzata által generált véges félcsoportok pszeudovarietása. Valójában Sl^t nem más, mint $\mathcal{SL}^t$ véges tagjainak osztálya (lásd [1]). Egy félcsoportot $\mathcal{R}$-triviálisnak nevezünk, ha minden elem különböző jobb főideált generál. Stiffler [45] megmutatta, hogy $\cup_{t\geq 1} Sl^t$ egybeesik a véges $\mathcal{R}$-triviális félcsoportok R pszeudovarietásával. Emiatt minden véges $\mathcal{R}$-triviális félcsoport egy $\mathcal{SL}^t$ alakú varietáshoz tartozik egy megfelelő t-re, amiből rögtön adódik az alábbi következtetés:

31. Következmény. *Bármely véges $\mathcal{R}$-triviáis félcsoport által generált varietás szabad spektrumának logaritmusa polinomiális.*

Mivel a Seif-sejtés monoidokról szól, meg kell, hogy említsük, hogy ugyanez teljesül félcsoportok helyett monoidokra is. Ugyanis egy M monoid által generált félcsoport varietás szabad spektruma aszimptotikusan egyenlő az M által generált monoid varietás szabad spektrumával. Továbbá, a fenti következmény véges $\mathcal{L}$-triviális félcsoportokra is teljesül, hisz egy $\mathcal{L}$-triviális félcsoport duális félcsoportja $\mathcal{R}$-triviális, és duális félcsoportok szabad spektruma azonos.

32. Következmény. *Bármely véges $\mathcal{L}$-triviáis félcsoport által generált varietás szabad spektrumának logaritmusa polinomiális.*

4.5 AZ EREDMÉNY UTÓÉLETE

Félcsoportok körében definiálható az úgynevezett kétoldali szemidirekt szorzat. Legyenek $(S;\circ)$, $(T;\cdot)$ félcsoportok, $\varphi\colon T^1 \to \mathrm{End}S$ monoid homomorfizmus. Ekkor $S**T$ jelöli a két félcsoport szemidirekt szorzatát, ahol az alaphalmaz: $S \times T$, a művelet pedig az alábbi módon definiálható:

$$(s_1,t_1)(s_2,t_2) = (s_1\varphi(t_1) \circ \varphi(t_1)(s_2), t_1 \cdot t_2).$$

Legyenek $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ félcsoport varietások, ekkor a két varietás szemidirekt szorzata $\mathcal{U}**\mathcal{V}$ az $S**T$ alakú szemidirekt szorzatok által generált varietás, ahol $S \in \mathcal{U}$ és $T \in \mathcal{V}$, azaz

$$\mathcal{U}**\mathcal{V} = \langle S**T \mid S \in \mathcal{U}, T \in \mathcal{V}\rangle$$

Ezek alapján félcsoport varietások iterált kétoldali szemidirekt hatványát a következő módon definiáljuk: $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}^{t+1} = \mathcal{V}**\mathcal{V}^t$. A $**$ operáció nem asszociatív. Dolinka [11] észrevette, hogy bár a disszertációban szereplő normálforma nem, a számolások, becslések egy az egyben átvihetőek félhálók iterált kétoldali szemidirekt hatványaira, ugyanis az azonosságbázisuk [3] nagyon hasonlít a(z egyoldali) szemidirekt hatvány azonosságbázisára.

33. Tétel. *(Blanchet-Sadri [3]) Legyen X változók megszámlalható halmaza, mely tartalmazz x-et és y-ot. Ekkor a következő típusú X feletti azonosságok alkotják $Sl^{(t)}$ egy azonosságbázisát:*

$$u_{t-1}\dots u_1x^2v_1\dots v_{t-1} = u_{t-1}\dots u_1xv_1\dots v_{t-1},$$

$$u_{t-1}\dots u_1xyv_1\dots v_{t-1} = u_{t-1}\dots u_1yxv_1\dots v_{t-1},$$

ahol az u_i, v_j*-k* X^+*-beli szavak,* $x, y \in c(u_1) \cap c(v_1)$*, valamint minden* $1 \leq i < t-1$*-re* $c(u_i v_i) \subseteq c(u_{i+1}) \cap c(v_{i+1})$*.*

Másrészt, ezen kétoldali szemidirekt hatványok által generált varietás véges elemei épp a DA pszeudovarietást alkotják. Így közvetlenül adódik a Seif-sejtést megerősítő általánosabb tétel:

34. Tétel. *(Dolinka* [11]*) Bármely véges* DA*-beli félcsoport által generált varietás szabad spektrumának logaritmusa polinomiális.*

5. Teljesen reguláris félcsoport varietások

5.1 $\underline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$

A fejezet elején először bevezetünk néhány alapvető fogalmat, jelölést. A fő forrásunk Polák [36] első cikke teljesen reguláris félcsoportokról, valamint Pastijn és Trotter [30] cikke ugyanezen témában. Ha valaki többet szeretne megtudni teljesen reguláris félcsoportokról, [36]-ban további részleteket olvashat róla.

Egy félcsoportot teljesen regulárisnak nevezünk, ha az csoportok uniója. A teljesen reguláris félcsoportok $\mathcal{CR}$ osztálya varietást alkot (kétváltozós szorzás és egyváltozós inverz). Egy $\mathcal{V}$ félcsoport varietást CRS varietásnak hívunk, ha minden $S \in \mathcal{V}$ teljesen reguláris. Legyen $\mathcal{V}$ egy CRS varietás. Jelölje $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ a $\mathcal{V}$-ben levő szabad félcsoportot. Legyen $a \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ egy kifejezés. Polák [36] alapján definiáljuk a következő invariánsokat:
$c(a)$ - a változóinak halmaza,
$0(a)$ - a leghosszabb $|c(a)| - 1$ változót tartalmazó kezdőszelete,
$\overline{0}(a)$ - az utoljára megjelenő változó elölről,
$1(a)$ - a leghosszabb $|c(a)| - 1$ változót tartalmazó végszelete,
$\overline{1}(a)$ - az utoljára megjelenő változó hátulról.

Legyen a és b két szó a szabad félcsoportból. Ekkor legyen
$a \overline{\sim} b$ akkor és csak akkor, ha $c(a) = c(b)$, $a \sim b$, $0(a) \overline{\sim} 0(b)$ és $1(a) \overline{\sim} 1(b)$,
$a \sim_0 b$ akkor és csak akkor, ha a szabad félcsoportnak vannak olyan e és f elemei, melyekre $e \sim f$, $a = 0(e)$ és $b = 0(f)$.
Megjegyezzük, hogy $a \overline{\sim} b$ definiálása $|c(a)|$ szerinti indukcióval történik, és a $0(a), 0(b), 1(a), 1(b)$-ra vonatkozó feltételeket el kell hagyni $|c(a)| = 1$ esetén. Legyen $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\sim)$. Jelölje $\mathcal{V}(\overline{\sim})$-t $\overline{\mathcal{V}}$ és $\mathcal{V}(\sim_0)$-t $\mathcal{V}_0$. Továbbá legyen $\mathcal{L}(CR)$ a teljesen reguláris félcsoportok varietásának részvarietásainak a hálója. Ekkor az ω relációt a következőképpen definiáljuk $\mathcal{L}(CR)$-n: $\mathcal{V} \omega \mathcal{W} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{W}}$ (azaz $\overline{\sim}_{\mathcal{V}} \Leftrightarrow \overline{\sim}_{\mathcal{W}}$). Valamint legyen $\underline{\mathcal{V}}$ az ω-osztály legkisebb olyan varietása, ami tartalmazza $\mathcal{V}$-t.

Pastijn és Trotter [30] más megközelítést, jelölést használ ugyanezekre a fogalmakra. Most nézzük meg ezeket. Legyen S egy teljesen reguláris félcsoport. Bármely $x \in S$ esetén jelölje x^0 S azon maximális részcsoportja egységelemét, amely tartalmazza x-et. Legyen ϱ egy kongruencia S-n. Definiáljuk ϱ nyomát és magját a következőképpen:

$$tr\,\varrho = \{(x^0, y^0) : x, y \in S\},$$
$$ker\,\varrho = \{x : (x, x^0) \in \varrho\},$$

azaz $tr\,\varrho$ nem más mint ϱ megszorítása S idempotenseinek halmazára, $ker\,\varrho$ pedig az idempotensek ϱ-osztályainak az uniója. Ha ϱ és σ

kongruenciák S-n, akkor

$$\varrho = \sigma \Leftrightarrow tr\varrho = tr\sigma \text{ és } ker\varrho = ker\sigma.$$

Továbbá jelölje $\mathcal{C}(CR)$ a teljesen invariáns kongruenciák hálóját $F_{\mathcal{C}R}$-en. Ekkor léteznek $\mathcal{K}, \mathcal{T}r$ és $\mathcal{T}_l$ teljes háló kongruenciák $\mathcal{C}(CR)$-en a következőképpen definiálva:

$$\begin{aligned} \varrho\mathcal{K}\sigma &\Leftrightarrow ker\varrho = ker\sigma, \\ \varrho\mathcal{T}_r\sigma &\Leftrightarrow \varrho \vee \mathcal{R} = \sigma \vee \mathcal{R}, \\ \varrho\mathcal{T}_l\sigma &\Leftrightarrow \varrho \vee \mathcal{L} = \sigma \vee \mathcal{L}, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{R}$ és $\mathcal{L}$ a Green-relációk. A $\varrho \in \mathcal{C}(\mathcal{CR})$ kongruencia $\mathcal{K}$- illetve $\mathcal{T}_r$-osztálya rendre a $[\varrho_{\mathcal{K}}, \varrho^{\mathcal{K}}]$ illetve $[\varrho_{\mathcal{T}_r}, \varrho^{\mathcal{T}_r}]$ intervalluma $\mathcal{L}(CR)$-nek. Mivel $\mathcal{L}(CR)$ és $\mathcal{C}(CR)$ antiizomorfak, így léteznek $\mathcal{K}$ és $\mathcal{T}_r$ teljes háló kongruenciák $\mathcal{L}(CR)$-en, ahol $\mathcal{VKW} \Leftrightarrow \varrho_{\mathcal{V}}\mathcal{K}\varrho_{\mathcal{W}}$ és $\mathcal{V}\mathcal{T}_r\mathcal{W} \Leftrightarrow \varrho_{\mathcal{V}}\mathcal{T}_r\varrho_{\mathcal{W}}$, valamint $\mathcal{V}$ $\mathcal{K}$- illetve $\mathcal{T}_r$-osztálya rendre a $[\mathcal{V}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}^{\mathcal{K}}]$ illetve a $[\mathcal{V}_{\mathcal{T}_r}, \mathcal{V}^{\mathcal{T}_r}]$ intervallum.

Vegyük észre, hogy Poláknál $\underline{\mathcal{V}}$ nem más, mint itt $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ és $\overline{\mathcal{V}}$ nem más, mint $\mathcal{V}^{\mathcal{K}}$. Polák $\underline{\mathcal{V}}$, $\overline{\mathcal{V}}$ és $\mathcal{V}_o$ segítségével leírja a szóproblémát teljesen reguláris félcsoportokra az ezen témában íródott 2. cikkében, [37]-ben, amit mi most nem ismertetünk, mert nagyon bonyolult, és csak ortodox félcsoportokra alkalmazták eddig. Így a szóprobléma leírását [30]-ból fogjuk idézni, azonban jelöléseket és tételeket mind Polák, mind Pastijn és Trotter cikkeiből használunk.

Legyen $\mathcal{G}$ egy csoportvarietás, ekkor jelölje $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ azt a félcsoport varietást, amelynek minden részfélcsoportja $\mathcal{G}$-beli csoportok uniója. Pastijn és Trotter [30] adtak egy leírást a $\mathcal{V}(\mathcal{G})$-beli szóprobléma eldöntésére. Ehhez szükségünk lesz egy szó karakterisztikus sorozatára. Ennek definíciója általános CRS varietásokra egy igen bonyolult, rekurzív definíció, véges exponensű csoportvarietások esetén kicsit egyszerűsödik. Mivel vizsgálataink elsősorban a lokálisan véges varietásokra szorítkoznak, esetünkben ez nem jelent semmilyen korlátozást.

35. Definíció. Legyen $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ egy lokálisan véges csoportvarietás, $u \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ egy szó és $|c(u)| > 1$. Ekkor u karakterisztikus sorozata $[u] = (u_0, u_1, \ldots, u_{h+1})$, ahol minden $i-$re u_i az i-edik leghosszabb olyan részszava u-nak, amelyre $|c(u_i)| = |c(u)| - 1$.

Jelölje u_c azt a szót, amelyet úgy kapunk, hogy $[u]$ minden elemét kiértékeljük $\mathbf{F}_{\mathcal{V}(\mathcal{G})}$-ben, majd a különböző u_i értékekhez különböző változókat rendelünk, és az így kapott változókat egymás mellé írjuk. Pontosabban: Legyen $A_u = \{w \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}(\mathcal{G})} : |c(w)| = |c(u)| - 1\}$, és tekintsünk egy tetszőleges injektív Ψ leképezést A_u-ból $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$-be. Ekkor legyen $u_c = \psi(u_1)\psi(u_2)\ldots\psi(u_{h+1})$.

36. Állítás. *(Pastijn, Trotter [30]) Legyenek $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ szavak. Ekkor $u \sim_{\mathcal{V}(\mathcal{G})} v$ akkor és csak akkor, ha*

(1) $c(u) = c(v)$,
(2) *ha* $|c(u)| = 1$, *akkor* $u \sim_{\mathcal{G}} v$,
(3) *ha* $|c(u)| > 1$, *akkor* $0(u) \sim_{\mathcal{V}(\mathcal{G})} 0(v)$ *és* $1(u) \sim_{\mathcal{V}(\mathcal{G})} 1(v)$, *valamint* $u_c \sim_{\mathcal{G}} v_c$.

Most megmutatjuk, hogy a $\mathcal{K}$ kongruenciának vannak egyelemű osztályai, vagy másképpen: A Polák-féle felosztásban vannak triviális intervallumok.

37. Állítás. *Legyen $\mathcal{G}$ egy csoportvarietás és $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{G})$. Ekkor $\underline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$ állítás megtalálható [37]-ben és [30] Lemma 3.4-ben. Így rátérünk a $\mathcal{V} = \underline{\mathcal{V}}$ bizonyítására. Definíció szerint $\underline{\mathcal{V}}$ a legkisebb olyan varietás, amely magja megegyezik $\mathcal{V}$ magjával, azaz $\mathcal{V}\mathcal{K}\underline{\mathcal{V}}$. A kongruencia magja a fécsoport részcsoportjainak a magjainak az egyesítése. Így azt kell igazolni, hogy tetszőleges $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ varietásra és a $\varphi : \mathbf{F}_{\mathcal{V}} \to \mathbf{F}_{\mathcal{W}}$ természetes homomorfizmusra van olyan részcsoportja $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$-nek, amelynek legalább két elemének a φ-nél vett képe egybeesik. Az $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ szabad algebra maximális részcsoportjai éppen a szabad algebra $\mathcal{D}$-osztályai. Egy $\mathcal{D}$-osztály minden elemének ugyanaz a kezdő- és végszelete, valamint az azonos kezdő- és végszelettel rendelkező elemek egy $\mathcal{D}$-osztályt alkotnak. Azaz, $u, v \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ pontosan akkor van egy $\mathcal{D}$-osztályban, ha $0(u)\bar{0}(u) \sim_{\mathcal{V}} 0(v)\bar{0}(v)$ és $\bar{1}(u)1(u) \sim_{\mathcal{V}} \bar{1}(v)1(v)$. Az ugyanazzal a betűkészlettel rendelkező $\mathcal{D}$-osztályok egy teljesen egyszerű részfélcsoportot alkotnak.

Minden teljesen reguláris félcsoport varietás tartalmazza a félhálók varietását, tehát $\mathcal{SL} < \mathcal{W}$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $v \in F_{\mathcal{V}}$-re $|c(v)| = |c(\varphi(v))|$. Mivel $\mathcal{SL} < \mathcal{W}$, ezért van két elem $u, v \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$, amelyeknek ugyanaz a betűkészlete és $\varphi(u) = \varphi(v)$. Azaz u és v ugyanabban a T teljesen egyszerű részfélcsoportban vannak. Ha egy részcsoportban vannak, akkor kész vagyunk. Ellenkező esetben ez azt jelenti, hogy $\varphi|_T$ a T egy nemtriviális kongruenciája. Egy ilyen kongruencia által vett faktor mindig megkapható úgy, hogy T szendvics-mátrixának néhány sorát vagy oszlopát egybeejtjük. Így feltehető, hogy van a mátrixnak két sora, amelyek egybeesnek. Ekkor van két elem, u és v, hogy

$$\bar{1}(u)1(u) \not\sim_{\mathcal{V}} \bar{1}(v)1(v)$$

és

$$\bar{0}(u)0(u) \sim_{\mathcal{V}} \bar{0}(v)0(v).$$

Megmutajuk, hogy ekkor van olyan t szó, hogy ut és vt egy részcsoportba esnek. Mivel $\varphi(ut) = \varphi(vt)$, ez igazolja az állítást. Ezt pedig a következőképpen bizonyítjuk be:

Megmutatjuk, hogy ha $u, v \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ szavakra teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{gathered} 0(u)\bar{0}(u) \sim_{\mathcal{V}} 0(v)\bar{0}(v), \\ u \not\sim_{\mathcal{V}} v, \\ \varphi(u) = \varphi(v), \end{gathered}$$

akkor van olyan $t \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$, hogy

$$\begin{gathered} 0(ut)\bar{0}(ut) \sim_{\mathcal{V}} 0(vt)\bar{0}(vt), \\ \bar{1}(ut)1(ut) \sim_{\mathcal{V}} \bar{1}(vt)1(vt), \\ ut \not\sim_{\mathcal{V}} vt, \\ \varphi(ut) = \varphi(vt). \end{gathered}$$

Jelölje Z_p a p elemű ciklikus csoportot. Minden csoportvarietás, így $\mathcal{G}$ is, tartalmaz egy $\mathcal{V}(Z_p)$-vel izomorf csoportvarietást valamilyen p prímszámra. Ha egy azonosság nem teljesül $\mathcal{V}(Z_p)$-ben, akkor automatikusan nem teljesül $\mathcal{G}$-ben sem, azaz $u_c \not\sim_{\mathcal{V}(Z_p)} v_c$ esetén $u_c \not\sim_{\mathcal{G}} v_c$ is teljesül.

Ezért az állítás $ut \not\sim_{\mathcal{V}} vt$ feltételének teljesüléséhez mi az $ut_c \not\sim_{\mathcal{V}(Z(p))} vt_c$ feltételt fogjuk igazolni. Ezt a változók száma szerinti indukcióval bizonyítjuk be. $n = 1$-re az állítás triviális. $n > 1$ esetén legyenek u_c és v_c az u és v karakterisztikus sorozataiból kapott csoportszavak.

1. eset Először tegyük fel, hogy $u_c \not\sim_{\mathcal{V}(Z_p)} v_c$. Ekkor van egy olyan w $n-1$ változós szó, amely u és v karakterisztikus sorozatában mod p nem ugyanannyiszor szerepel. Legyen y a w-ben nem szereplő egyetlen változó. Ekkor

$$uyw \not\sim_{\mathcal{V}} vyw \text{ és } \varphi(uyw) = \varphi(vyw).$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy a két kifejezésnek ugyanaz a kezdő- és végszelete, tehát ugyanabban a részcsoportban vannak. Azaz bizonyítottuk a kívánt állítást.

2. eset Most tegyük fel, hogy $u_c \sim_{\mathcal{V}(Z_p)} v_c$. Ekkor legyen u karakterisztikus sorozatában az utolsó $n-1$ változós szó w_u és v-jében w_v. Tekintsük w_u és w_v karakterisztikus sorozatait. Három alesetet különböztetünk meg.

2./a Első aleset, ha $w_{u_c} \not\sim_{\mathcal{V}(Z_p)} w_{v_c}$. Ekkor van egy olyan w $n-2$ változós szó, ami w_u és w_v karakterisztikus sorozatában mod p nem ugyanannyiszor szerepel. Legyen y_1 és y_2 a w-ben nem szereplő két változó. Ekkor

$$uy_1y_2w \not\sim_{\mathcal{V}} vy_1y_2w \text{ és } \varphi(uy_1y_2w) = \varphi(vy_1y_2w).$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy a két kifejezés ugyanabban a részcsoportban van. Azaz erre az esetre is bizonyítottuk az állítást.

2./b A második alesetben $w_{u_c} \sim_{\mathcal{V}(Z_p)} w_{v_c}$, de $0(w_u) \not\sim_{\mathcal{V}} 0(w_v)$. Ekkor ha $c(w_u) = c(w_v)$, akkor legyen y a w_u-ban és w_v-ben nem szereplő változó. Ekkor

$$uw_uy \not\sim_{\mathcal{V}} vw_uy,$$

mert $(uw_uy)_c \not\sim_{\mathcal{V}(Z_p)} (vw_uy)_c$, mivel w_u mod p nem ugyanannyiszor szerepel uw_uy és vw_uy karakterisztikus sorozatában. Hiszen uw_uy karakterisztikus sorozatát megkaphatjuk úgy, hogy u karaktertisztikus sorozatából elhagyjuk az utolsó w_u-t, hozzáveszünk egy w_u^2-t és $1(w_u)y$-t. Hasonlóan vw_uy karakterisztikus sorozatát megkaphatjuk úgy, hogy v karaktertisztikus sorozatából elhagyjuk az utolsó w_v-t, hozzáveszünk egy w_vw_u-t és $1(w_u)y$-t. Azaz ahhoz, hogy $uw_uy \sim_{\mathcal{V}} vw_uy$ teljesüljön, kellene, hogy $w_u \sim_{\mathcal{V}} w_uw_{\mathcal{V}}$ és $w_v \sim_{\mathcal{V}} w_u^2$. Azonban $0(w_v) \not\sim_{\mathcal{V}} 0(w_u)$, így $0(w_v) \not\sim_{\mathcal{V}} 0(w_u^2)$, azaz $w_v \not\sim_{\mathcal{V}} w_u^2$. Továbbá

$$\varphi(uw_uy) = \varphi(vw_uy),$$

valamint nyilvánvaló, hogy a két kifejezés ugyanabban a részcsoportban van. Azaz újra bebizonyítottuk a kívánt állítást.

Ha $c(w_u) \neq c(w_v)$, akkor legyen y a w_u-ban nem szereplő változó. Ekkor

$$uyw_u \not\sim_{\mathcal{V}} vyw_u,$$

mert $(uyw_u)_c \not\sim_{\mathcal{V}(Z_p)} (vyw_u)_c$. Hiszen uyw_u karakterisztikus sorozatát megkaphatjuk úgy, hogy u karaktertisztikus sorozatához hozzáveszünk egy w_u-t, egy $y0(w_u)$-t és egy $1(w_u)y$-t. Hasonlóan vyw_u karakterisztikus sorozatát megkaphatjuk úgy, hogy v karaktertisztikus sorozatából elhagyjuk az utolsó w_v-t, hozzáveszünk egy w_u-t, egy $y0(w_u)$-t és egy w_vy-t. Nyilvánvalóan u-nál $1(w_u)y$ hozzávétele nem egyenlítheti ki v-nél w_v elhagyását és w_vy hozzávételét. Továbbá

$$\varphi(uyw_u) = \varphi(vyw_u),$$

valamint teljesül, hogy a két kifejezés ugyanabban a részcsoportban van. Azaz ebben az esetben is bizonyítottuk a kívánt állítást.

2./c A harmadik alesetben $w_{u_c} \sim_{\mathcal{V}(Z_p)} w_{v_c}$, $0(w_u) \sim_{\mathcal{V}} 0(w_v)$, de $1(w_u) \not\sim_{\mathcal{V}} 1(w_v)$. Ekkor alkalmazzuk az indukciós feltételt az $1(u)$ és

$1(v)$ szavakra: A feltétel alapján van olyan $t \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ szó, hogy

$$0(1(u)t)\bar{0}(1(u)t) \sim_{\mathcal{V}} 0(1(v)t)\bar{0}(1(v)t),$$
$$\bar{1}(1(u)t)1(1(u)t) \sim_{\mathcal{V}} \bar{1}(1(v)t)1(1(v)t),$$
$$1(u)t \not\sim_{\mathcal{V}} 1(v)t,$$
$$\varphi(1(u)t) = \varphi(1(v)t).$$

Ekkor az ut és vt szópár megfelel a 2./a aleset feltételeinek, azaz az u,v pár vagy az 1. vagy 2./a eset feltételeit teljesíti, és ezekre márbizonyítottuk az állítást.

5.2 Maximális CRS varietások szabad spektruma

Legyen $\mathcal{V}$ egy félcsoport varietás. Emlékeztetőül $p_n(\mathcal{V})$ jelöli a pontosan n-változós, míg $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ az n-változós $\mathcal{V}$-beli szavak számát. Így nyilvánvalóan az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A})$ egyenlőség fennáll. Egy lokálisan véges csoportvarietás exponense véges, ezért valamilyen r-re kielégíti az $x^{r-1} = 1$ azonosságot. Emiatt, a megfelelő teljesen reguláris félcsoport varietás kielégíti az $x^r = x$ azonosságot. Tehát ezek a varietások egy bizonyos értelemben maximális CRS varietások. Green és Rees [17] bebizonyította, hogy az $x^r = x$ által definiált félcsoport varietás lokálisan véges akkor és csak akkor, ha az $x^{r-1} = 1$ által definiált csoportvarietás lokálisan véges. Továbbá a következő rekurziót adták ezen maximális CRS varietások p_n sorozatára: $p_n = n^2 p_{n-1}^2 |G_m|$ valamilyen m-re, ahol G_m az m elem által generált szabad csoport az $x^{r-1} = 1$ által definiált csoportvarietásban. Az $r = 2$: $x^2 = x$ esetben ezt a CRS varietást köteg varietásnak hívják, amikor is $|G_m| = 1$, és ahogy a 2. fejezetben látható, megmutattuk [34], hogy $p_n \sim \frac{1}{n^2} K^{2^{n+1}}$, ahol $K = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\dots}}}} \sim 1,661687$. A $r \geq 3$ eset megoldatlan és sokkal bonyolultabb. Kadourek és Polák [22] adott egy komplikált, $F_{\mathcal{V}}(n-1)$ struktúrájától függő rekurzív leírást G_m generátoraira. Legyen $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Először tekintették az X^+ félcsoport szokásos lex-short jólrendezését $\leq$, és ezek alapján definiálták bármely $u \in X^+$-ra $\hat{u}$-t, mint u ekvivalenciaosztályának, $[u]_\sim$-nak, a legkisebb elemét. Legyen $u \in X^+$ és $|c(u)| = n$, ekkor jelölje $\underline{u}$ a legrövidebb olyan u-t tartalmazó szót, amelynek a kezdő- és végszelete is $x_1 x_2 ... x_n$. Egy n-változós w szót reduktnak hívunk, ha vagy $w = x_1 x_2 ... x_n$ vagy $w = \overline{x_j d x_j}$, valamely $j \in 1, ..., n$ és $c(d) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \setminus \{x_j\}$, $\hat{d} = d$ és $d \neq x_{j+1} x_{j+2} ... x_n x_1 x_2 ... x_{j-1}$. Az $x_1, x_2, ..., x_n$ feletti reduktok halmazát jelölje Δ_n. Végül megmutatták, hogy G_m generátorainak halmaza nem más, mint $[\Delta_n]_\sim = \{[w]_\sim : w \in \Delta_n\}$. Vegyük észre, hogy az $x_n d x_n$ alakú elemek mind különbözők, ha $c(d) = x_1, \ldots, x_{n-1}$, mert a karakterisztikus sorozatukban szereplő egyetlen x_n-t nem tartalmazó szó különböző. Ebből látható, hogy $p_{n-1} \leq m \leq n p_{n-1}$. Ezt alkalmazva az $x^3 = x$ által definiált CRS varietásra, ahol $|G_m| = 2^m$ azt kapjuk, hogy

$$p_n = n^2 p_{n-1}^2 |G_m| \geq n^2 p_{n-1}^2 2^{p_{n-1}} \geq 2^{p_{n-1}} \geq 2^{2^{p_{n-2}}} \geq \cdots \geq 2^{2^{\cdots^{2}}},$$

ahol a kitevőben n darab 2-es van. Azaz ez az egyenlőtlenség megmutatja, hogy ennek a varietásnak "hatalmas" a szabad spektruma. Természetesen az $x^3 = x$ által definiált CRS varietás helyett bármely $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ varietást használhattuk volna, hisz minden $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ varietás tartalmaz Z_p által generált varietást valamilyen p prímre, így a fenti egyenlőtlenség rájuk is teljesül. Megjegyezzük, hogy Dolinka [10] a szerző ezen eredményt újrabizonyította hivatkozva egy a dolgozat szerzője által tartott előadásban hallottakra. $\square$

Hivatkozások

[1] J. Almeida, *On iterated semidirect products of finite semilattices*, J. Algebra **142** (1991), 239-251.

[2] J. Almeida, *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, 1994.

[3] F. Blanchet-Sadri, *On semidirect and two-sided semidirect products of J-trivial monoids*, Inform. Théor. Appl. **30** (1996), 457-482.

[4] J. Berman, *Free spectra gaps and tame congruence types*, Int. J. Algebra Comput. **5** (1995), 651-672.

[5] A. P. Biryukov, *Varieties of idempotent semigroups*, Algebra Logic **9** (1970), 153-164.

[6] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups and their inflations*, Semigroup Forum **62** (2001), 103-114.

[7] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *Finite semigroups with few term operations*, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 205–214.

[8] S. Crvenković, N. Ruškuc, *Log-linear varieties of semigroups*, Algebra Universalis **33** (1995), 370–374.

[9] I. Dolinka, *On free spectra of completely regular semigroups and monoids*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1979-1990.

[10] I. Dolinka, *On maximal subgroups of free objects of certain completely regular semigroup varieties*, International Journal of Algebra and Computation **21** (2011), 473-484.

[11] I. Dolinka, On free spectra of finite monoids from the pseudovariety DA, Semigroup Forum online first, DOI: 10.1007/s00233-012-9374-6.

[12] I. Dolinka, P. Marković, *The Berman conjecture is true for nilpotent extensions of regular semigroups*, Algebra Universalis **51** (2004), 435-438.

[13] C. Fennemore, *All varieties of bands*, Math. Nachr. **48** (1971), 237-262.

[14] J. A. Gerhard, *The lattice of equational classes of idempotent semigroups*, J. Algebra **15** (1970), 195-224.

[15] J. A. Gerhard, *The number of polynomials of idempotent semigroups*, J. Algebra **18** (1971), 366-376.

[16] J. A. Gerhard, *Some subdirectly irreducible idempotent semigroups*, Semigroup Forum, **5** (1973), 362-369.

[17] J. A. Green, D. Rees, *On semi-groups in which $x^r = x$*, Proc. Camb. Philos. Soc **48** (1952), 35-40.

[18] G. Higman, *The orders of relatively free groups*, Proc. Int. Conf. Theory Groups, Canberra 1965, 153-165 (1967).

[19] D. Hobby, R. McKenzie, *The structure of finite algebras*, Contemporary Mathematics no. 76, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[20] G. Horváth, K. Kátai-Urbán, P. P. Pach, G. Pluhár, A. Pongrácz, Cs. Szabó, *On free algebras in varieties generated by iterated semidirect products of semilattices*, Int. J. Alg. Comput. (2011), to appear.

[21] J. M. Howie, J. *An introduction to semigroup theory*, L.M.S monographs no. 7, Academic Press, London-New York Providence, 1976.

[22] J. Kadourek, L. Polák, *On free semigroups satisfying $x^r = x$*, Simon Stevin **64** (1990), 3-19.

[23] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the combinatorial completely 0-simple semigroups*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 93-98.

[24] K. Kátai, Cs. Szabó, *The p_n sequences of semigroup varieties generated by combinatorial 0-simple semigroups,* Algebra Universalis **59** (2008), 435-446.
[25] A. D. Korshunov. On the number of monotone Boolean functions. J. Probl. Kibern. **38** (1981), 5-108.
[26] L. G. Kovács, *On the number of varieties of groups*, (English) J. Aust. Math. Soc. **8** (1968), 444-446.
[27] V. L. Murskiĭ, *The existence of a finite basis of identities and other properities of "almost all" finite algebras*, (in Russian) Problemy Kibernet, No. 30 (1975), 43-56.
[28] P. Neumann, *Some indecomposable varieties of groups*, Quart. J, Math. Oxford **14** (1963), 46-50.
[29] A. Yu. Ol'shanski, *On the orders of free groups of locally finite varieties*, (Russian)Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **37** (1973), 89-94.
[30] F. J. Pastijn, P. G. Trotter, *Residual finiteness in completely regular semigroup varieties*, Semigroup Forum **37** (1988), 127-147.
[31] M. Petrich, *The Green relations approach to congruences on completely regular semigroups*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. **167** (1994), 117-146.
[32] M. Petrich,*The kernel relation for a completely regular semigroup*, J. Algebra **172** (1995), 90-112.
[33] M. Petrich, *The lattice of varieties of completely regular semigroups*, Results Math. **48** (2005), 131-157.
[34] G. Pluhár, Cs. Szabó *The free spectrum of the variety of bands*, Semigroup Forum **76** (2008), 576-578.
[35] G. Pluhár, J. Wood *The free spectra of varieties generated by idempotent semigroups*, Algebra and Discerete Mathematics **2** (2008), 89-100.
[36] L. Polák, *On varieties of Completely Regular semigroups I*, Semigroup Forum **32** (1985), 97-123.
[37] L. Polák, *On varieties of Completely Regular semigroups II*, Semigroup Forum **36** (1987), 253-284.
[38] L. Polák, *On varieties of Completely Regular semigroups III*, Semigroup Forum **37** (1988), 1-30.
[39] D. Rees, *On semi-groups*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **36** (1940), 387-400.
[40] N. Reilly, *Completely regular semigroups*, Lattices, semigroups, and universal algebra (Lisbon, 1988), 225-242, Plenum, New York, 1990.
[41] N. Reilly, *Varieties generated by completely 0-simple semigroups,* J. Aust. Math. Soc. **84** (2008), 375-403.
[42] S. W. Seif, *Monoids with sub-log-exponential free spectra*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 1162-1174.
[43] S. W. Seif, Cs. Szabó, *Computational complexity of checking identities in 0-simple semigroups and matrix semigroups over finite fields*, Semigroup Forum **72** (2006), 207-222.
[44] S. W. Seif, J. Wood, *Asymptotic growth of free spectra of band monoids*, Semigroup Forum **75** (2007), 77-94.
[45] P. Stiffler, *Extensions of the fundamental theorem of finite semigroups*, Adv. Math. **11** (1973), 159-209.

[46] H. Straubing, D. Thérien, Weakly iterated block products of finite monoids, in: (ed. S. Rajsbaum) Proc. LATIN 2002, Lecture Notes Comput. Sci. 2286, pp. 91-104, Springer- Verlag, Berlin, 2002.

Összefoglalás

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. Higman és Neumann bizonyította, hogy ha **G** véges csoport, akkor a **G** által generált varietásban az n-elem által generált relatív szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n-ben, ha **G** nilpotens, egyébként pedig dupla-exponenciális.

A vizsgálatok egy másik iránya az úgynevezett krémsejtés igazolását célozta meg. Higman csoportvarietások vizsgálata közben azt vette észre, hogy a varietások szabad spektruma nem lehet akármilyen függvény. Az általa kapott szabad spektrumok mind előálltak összeadás, szorzás és (racionális szám) hatványozás(a) ismételt kombinációjaként (**C**ombination of **R**epeated **E**xponentiation, **A**ddition and **M**ultiplicaton, azaz CREAM). Dolgozatunkban megcáfoljuk a CREAM sejtést: minden $k > 0$-ra mutatunk olyan végesen generált félcsoport varietást (pontosabban köteg varietást), amely szabad spektrumának logaritmusa aszimptotikusan $cn^k \log n$.

Elengedhetetlen tehát a félcsoport varietások szisztematikus vizsgálata. Elsőként természetesen a legkisebb illetve a legnagyobb varietások szabad spektrumait érdemes viszgálni. A kicsiket tekintve A_2^1 a legkisebb elemszámú monoid, mely által generált varietás szabad spektrumának mérete még nem ismert. Mi erre adunk alsó- illetve felső becslést. Továbbá az úgynevezett DA osztály varietásait vizsgáljuk, félhálók iterált szemidirekt szorzatáról bebizonyítjuk, hogy az általuk generált varietások szabad spektruma "kicsi". A nagyok tekintetében a helyzet sokkal bonyolultabb. Mi a teljesen reguláris félcsoportok osztályán belül az egy bizonyos értelemben maximális, illetve ahhoz közeli varietásokat kezdtük el vizsgálni, és megmutatjuk, hogy az $x^3 = x$ által definiált teljesen reguláris félcsoport varietás szabad spektruma "hatalmas", nagyobb, mint $2^{2^{\cdots^{2}}}$.

Summary

For finite algebras there are strong connections between the structural properties of the algebra and the free spectrum of the variety generated by the algebra itself. Higman and Neumann proved that if **G** is a finite group, then the size of the n-generated relatively free group in the variety generated by **G** is exponential in n if **G** is nilpotent, and doubly-exponential if **G** is not nilpotent. In this dissertatition we try to give Higman-Neumann type theorems for semigroup varieties.

Another direction of the examinations is aimed to prove the CREAM Conjecture. While examining group varieties Higman observed that the free spectra of the varieties cannot be an arbitrary function. All of the free spectra attained by him could be expressed as the **C**ombination of **R**epeated **E**xponentiation, **A**ddition and **M**ultiplicaton, that is, CREAM. In our dissertation we disaffirm the CREAM Conjecture: for every $k > 0$ we give a finitely generated semigroup variety (more precisely, a band variety), which free spectrum's logarithm is assymptotically $cn^k \log n$.

Therefore, it is necessary to examine the semigroup varieties systematically. At first it is worth investigating the free spectra of the smallest and the biggest varieties. Considering the small ones, A_2^1 is the smallest monoid, which is not deeply observed, even the size of the free spectrum of the variety generated by A_2^1 is unknown. We give lower- and upper estimates for this. Additionally, we investigate the free spectra of the varieties of the class so-called DA, and prove that the free spectra of the varieties generated by the iterated semidirect product of semilattices are small. Considering the big ones the situation is much more difficult. We start examining the, in a sense, maximal completely regular semigroup varieties, and the ones close to them. We show that the free spectrum of the variety defined by $x^3 = x$ is "huge", bigger than $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$.